Soluzioni del 14 gennaio 2016

Simone Secchi

12 gennaio 2016

1. La funzione è globalmente definita, cioè $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inoltre,

$$f(-x) = \sqrt[5]{(-x)(x^2-1)^2} = -f(x),$$

sicché la funzione è dispari. Da questo momento la studieremo nel dominio ristretto $[0,+\infty)$, ricordandoci di disegnarla simmetrica rispetto all'origine per $x<0$. Risulta $f(0)=0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x(x^2-1)^2} = +\infty.$$

Non esistono asintoti verticali né orizzontali, ma potrebbero esistere due asintoti obliqui. Controlliamo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x(x^2-1)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{(x^2-1)^2}{x^4}} = 1.$$

Inoltre

$$q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x(x^2-1)^2} - x.$$

Questo limite non è banale, e possiamo risolverlo ricordando che

$$A^5 - B^5 = (A-B)(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4).$$

Per $A = \sqrt[5]{x(x^2-1)^2}$ e $B=x$, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x(x^2-1)^2} - x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2-1)^2 - x^5}{(x(x^2-1)^2)^{4/5} + (x(x^2-1)^2)^{3/5}x + (x(x^2-1)^2)^{2/5}x^2 + \sqrt[5]{x(x^2-1)^2}x^3 + x^4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 2x^3 + x - x^5}{5x^4} = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che a denominatore le potenze di esponente più elevato sono ovunque x^4. Concludiamo che la retta $y=x$ è l'asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Evidentemente, la retta $y=x$ sarà anche l'asintoto per $x\to-\infty$. Prima di proseguire, notiamo che $f(x)>0$ per $x>0$.

La derivata prima si calcola con le solite formule per le funzioni composte:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 6x^2 + 1}{5(x(x^2-1)^2)^{4/5}}.$$

Notiamo che questa funzione non è derivabile per $x=0$ e per $x=1$. Per studiare il segno di f', poniamo $u=x^2$. Il numeratore espresso in termini della variabile u è $5u^2-6u+1$, e risulta positivo per $u<1/5$ o $u>1$. In termini della variabile x, dobbiamo risolvere $x^2<1/5$ e $x^2>1$ sotto la condizione $x\geq 0$. Quindi la derivata prima è positiva per $0<x<1/\sqrt{5}$ o per $x>1$. Per $x=1/\sqrt{5}$ troviamo un punto di massimo e per $x=1$ ($f(1)=0$) un punto di minimo. Ora che sappiamo che

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-1/5)}{5(x(x^2-1)^2)^{4/5}}$$

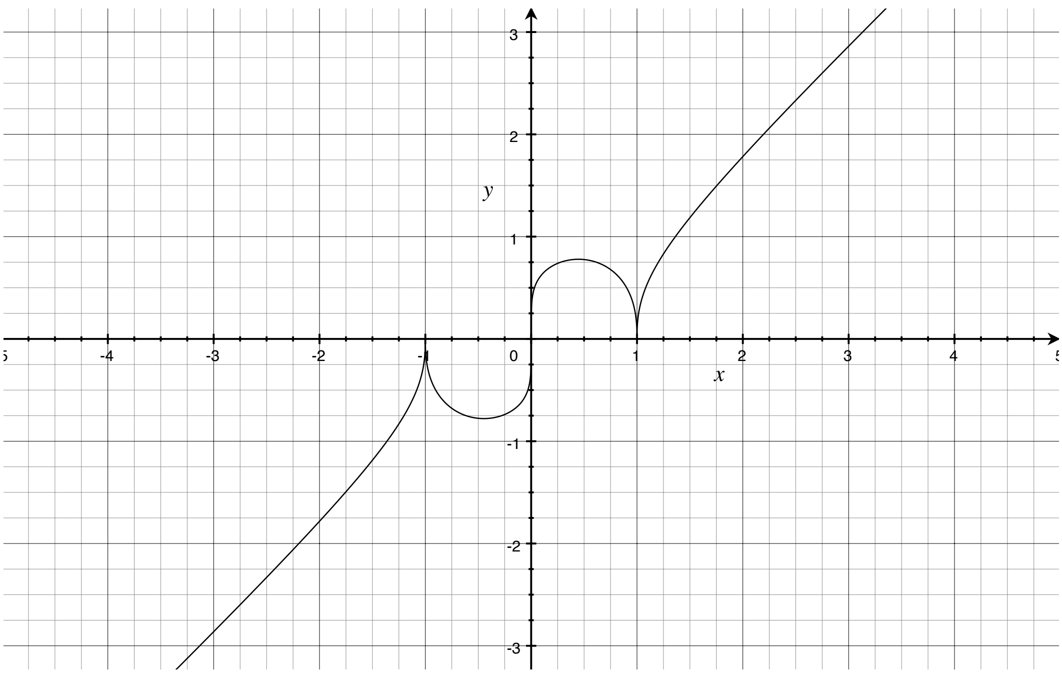

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

possiamo concludere agevolmente che $\lim_{x\to 1\pm} f'(x) = \pm\infty$: dunque $x = 1$ è una cuspide per il grafico della funzione. In Figura 1 è riportato un grafico dell'andamento qualitativo della funzione in esame.

2. Per valutare il limite proposto, che si presenta nella forma indeterminata $[1^{+\infty}]$, è opportuno utilizzare il "trucco dell'esponenziale":

$$(\cos(3x))^{\frac{1}{x\sin(5x)}} = e^{\frac{\log\cos(3x)}{x\sin(5x)}}$$

Concentriamoci dunque sull'esponente e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\cos(3x)}{x\sin(5x)}.$$

Ora, ricordando i limiti notevoli, $\cos(3x) \sim 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 = 1 - \frac{9}{2}x^2$, $\log\cos(3x) \sim \log(1 - \frac{9}{2}x^2) \sim -\frac{9}{2}x^2$ e $\sin(5x) \sim 5x$ per $x \to 0^+$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\cos(3x)}{x\sin(5x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{9}{2}x^2}{x\cdot 5x} = -\frac{9}{10}.$$

Infine,

$$\lim_{x\to 0+} (\cos(3x))^{\frac{1}{x\sin(5x)}} = e^{-\frac{9}{10}}.$$

3. L'integrale è un po' subdolo. Conviene operare per parti, scomponendo $x^3\sqrt{2-x^2} = x^2 \cdot x\sqrt{2-x^2}$. Ora

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot x\sqrt{2-x^2}\,dx &= -\frac{1}{3}x^2(2-x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\int x(2-x^2)^{3/2}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2(2-x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(2-x^2)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

Possiamo semplificare ulteriormente il risultato, raccogliendo a fattor comune $(2-x^2)^{3/2}$:

$$\int x^3\sqrt{2-x^2}\,dx = -\frac{1}{15}(3x^2+4)(2-x^2)^{3/2}+C.$$

4. Partiamo dalle nostre conoscenze sulla funzione seno. In particolare ricordiamo che la restrizione del seno all'intervallo $[-\pi/2,\pi/2]$ è biunivoca su $[-1,1]$.

Ora, siccome stiamo lavorando con $\sin(2t)$ invece che con $\sin t$, ci basta dimezzare l'intervallo della variabile indipendente e prendere

$$I=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],\qquad J=[-1,1].$$

La funzione inversa è $f^{-1}\colon J\to I$ definita da $f^{-1}(s)=\frac{1}{2}\arcsin s$.

Soluzioni del 14 gennaio 2016

Simone Secchi

15 gennaio 2016

1. Partiamo dalle nostre conoscenze sulla funzione tangente. In particolare ricordiamo che la restrizione del seno all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ è biunivoca su $(-\infty, +\infty)$.

Ora, siccome stiamo lavorando con $\tan(2t)$ invece che con $\tan t$, ci basta dimezzare l'intervallo della variabile indipendente e prendere

$$I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad J = (-\infty, +\infty).$$

La funzione inversa è $f^{-1} \colon J \to I$ definita da $f^{-1}(s) = \frac{1}{2} \arctan s$.

2. Per valutare il limite proposto, che si presenta nella forma indeterminata $[1^{+\infty}]$, è opportuno utilizzare il "trucco dell'esponenziale":

$$(\cos(2x))^{\frac{1}{x \sin(3x)}} = e^{\frac{\log \cos(2x)}{x \sin(3x)}}$$

Concentriamoci dunque sull'esponente e calcoliamo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log \cos(2x)}{x \sin(3x)}.$$

Ora, ricordando i limiti notevoli, $\cos(2x) \sim 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 = 1 - 2x^2$, $\log \cos(2x) \sim \log(1 - 2x^2) \sim -2x^2$ e $\sin(3x) \sim 3x$ per $x \to 0^+$. Pertanto

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log \cos(3x)}{x \sin(5x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{-2x^2}{x \cdot 3x} = -\frac{2}{3}.$$

Infine,

$$\lim_{x \to 0+} (\cos(3x))^{\frac{1}{x \sin(5x)}} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

3. La funzione è globalmente definita, cioè $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inoltre,

$$f(-x) = \sqrt[5]{(-x)(x^2+1)^2} = -f(x),$$

sicché la funzione è dispari. Da questo momento la studieremo nel dominio ristretto $[0, +\infty)$, ricordandoci di disegnarla simmetrica rispetto all'origine per $x < 0$. Risulta $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x(x^2+1)^2} = +\infty.$$

Non esistono asintoti verticali né orizzontali, ma potrebbero esistere due asintoti obliqui. Controlliamo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[5]{x(x^2+1)^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)^2}{x^4}} = 1.$$

Inoltre

$$q = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x(x^2+1)^2} - x.$$

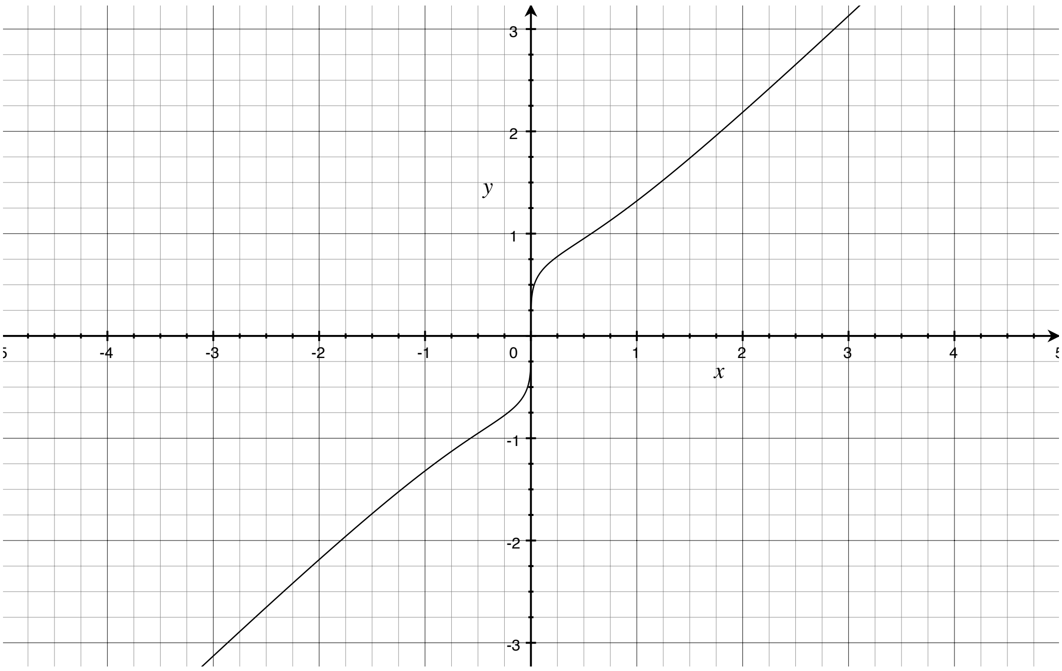

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Questo limite non è banale, e possiamo risolverlo ricordando che

$$A^5 - B^5 = (A - B)(A^4 + A^3 B + A^2 B^2 + A B^3 + B^4).$$

Per $A = \sqrt[5]{x(x^2+1)^2}$ e $B = x$, troviamo

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x(x^2+1)^2} - x = \\ &\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1)^2 - x^5}{(x(x^2+1)^2)^{4/5} + (x(x^2+1)^2)^{3/5}x + (x(x^2+1)^2)^{2/5}x^2 + \sqrt[5]{x(x^2+1)^2}x^3 + x^4} \\ &\qquad = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 2x^3 + x - x^5}{5x^4} = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che a denominatore le potenze di esponente più elevato sono ovunque x^4. Concludiamo che la retta $y = x$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Evidentemente, la retta $y = x$ sarà anche l'asintoto per $x \to -\infty$. Prima di proseguire, notiamo che $f(x) > 0$ per $x > 0$.

La derivata prima si calcola con le solite formule per le funzioni composte:

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 6x^2 + 1}{5(x(x^2+1)^2)^{4/5}}.$$

Notiamo che questa funzione non è derivabile per $x = 0$. Il segno della derivata prima è banale, poiché il numeratore è somma di quadrati e il denominatore è sempre positivo per $x > 0$. Dunque la funzione è crescente strettamente in $[0, +\infty)$. Poiché risulta facilmente $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$, e conseguentemente $\lim_{x\to 0-} f'(x) = +\infty$, l'origine è un flesso a tangente verticale.

In Figura 1 è riportato un grafico dell'andamento qualitativo della funzione in esame. In particolare, poiché nell'intorno dell'origine il grafico è al disopra dell'asintoto obliquo, dobbiamo necessariamente concludere che esiste un flesso (a tangente obliqua) in qualche punto di ascissa strettamente positiva.

4. L'integrale è un po' subdolo. Conviene operare per parti, scomponendo $x^3\sqrt{1-x^2} = x^2 \cdot x\sqrt{1-x^2}$. Ora

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot x\sqrt{1-x^2}\,dx &= -\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\int x(1-x^2)^{3/2}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1-x^2)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

Possiamo semplificare ulteriormente il risultato, raccogliendo a fattor comune $(1-x^2)^{3/2}$:

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{15}(3x^2+2)(1-x^2)^{3/2} + C.$$