Istituzioni di Matematica II – 27/10/2015

Nome e cognome	Matricola

Esercizio 1. a. Data la matrice A dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

discutere, al variare di k, il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato.

b. Scrivere l'equazione della retta nello spazio, passante per i punti $P = (1,2,0)^T$ e $Q = (3,-2,-1)^T$ (a vostra scelta se scrivere l'equazione vettoriale o scalare).

Esercizio 2. Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $f(x) = \frac{3}{1+3x}$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo.

Scrivere poi il polinomio di MacLaurin $T_4(x)$ della funzione $g(x) = x \cdot f(x) + 4\sin(2x)$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo.

Esercizio 3. Discutere il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$. Calcolare poi la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \frac{y^2}{x^2+y^2}\, ds$, dove γ è la curva $\theta \in [0,2\pi] \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Esercizio 5. Calcolare $\int_E xy\, dx\, dy$, dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ -x^2 \le y < 1+x\}$.

Esercizio 6. a. Data la funzione $f(x,y) = x^2y - 9y + 4x + 5$, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

b. Determinare i punti di massimo e di minimo vincolati sul segmento che unisce i punti $(0,0)$ e $(3,-3)$.

c. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,0,f(0,0))$.

Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1).$$

Può essere utile ricordare che, per ogni α e $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$