Istituzioni di Matematica II – 26 Maggio 2015

Nome e cognome	Matricola

Esercizio 1. Individuare tutti i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + y$ e determinarne la natura. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione f sul perimetro del rettangolo di vertici $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$ e $(2, -1)$.

Esercizio 2. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{(n+1)(n+2)},$$

riconducendola ad una somma telescopica. Stabilire infine il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

Esercizio 3. Sia

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iiint_V y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Esercizio 4. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = x^y + y^x$, e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

Esercizio 5. Data la funzione $f(x) = \log(1 - \frac{x^2}{2})$, scriverne lo sviluppo in serie di MacLaurin specificando l'insieme di convergenza. Scrivere poi il polinomio di MacLaurin $T_4(x)$ della funzione $g(x) = x \cdot f(x) + \sin(x)$.

Esercizio 6. Sia γ l'arco della parabola $y = x^2 + 1$ per $0 < x < 1$. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{4 + x - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}\, ds.$$

Esercizio 7. Discutere la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2k \\ 2 & 1 & k-1 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 4-2k \end{pmatrix},$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire per quali k i vettori dati dalla seconda e dalla terza riga di A sono perpendicolari.

Esercizio 8. Data l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 0)^T = (3, 0, 0)^T$, $f(0, 1, 0)^T = (1, 2, 0)^T$, $f(0, 0, 1)^T = (0, 1, 1)^T$, scrivere la matrice associata. Determinare gli autovalori di tale matrice. Determinare anche gli autovettori associati al più grande autovalore trovato.

Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di funzioni elementari

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k && \text{per ogni } x \in (-1,1) \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k && \text{per ogni } x \in (-1,1) \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} && \text{per ogni } x \in (-1,1).
\end{aligned}
$$

Può essere utile ricordare che, per ogni α e $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$