Soluzioni

26 Maggio 2015

Esercizio 1. Le derivate parziali valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 1.$$

Quindi l'unico punto critico è $(-1/2, 1/2)$. La matrice Hessiana è

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e dunque il punto critico è un punto di sella.

Per rispondere alla seconda parte del problema, dobbiamo parametrizzare i lati del rettangolo, individuando i punti di minimo e di massimo assoluti. Ora,

$$\begin{aligned} f(2,y) &= 6 + y - y^2, \quad -1 < y < 1 \\ f(x,1) &= x + x^2, \quad -2 < x < 2 \\ f(-2,y) &= 2 + y - y^2, \quad -1 < y < 1 \\ f(x,-1) &= -2 + x + x^2, \quad -2 < x < 2. \end{aligned}$$

La prima funzione assume massimo assoluto in $(1/2, 25/4)$ e minimo assoluto in $(-1, 4)$. La seconda assume massimo assoluto in $(2, 6)$ e minimo assoluto in $(-1/2, 21/4)$. La terza assume massimo assoluto in $(1/2, 9/4)$ e minimo assoluto in $(-1, 0)$. La quarta funzione assume massimo assoluto in $(2, 4)$ e minimo assoluto in $(-1/2, -9/4)$.

Possiamo allora concludere che il minimo assoluto è assunto in $(-1/2, -9/4)$ e il massimo assoluto in $(1/2, 25/4)$.

Esercizio 2. Poiché

$$-\frac{3}{(n+1)(n+2)} = -\frac{3}{n+1} + \frac{3}{n+2},$$

la serie è telescopica e converge a

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{(n+1)(n+2)} = -\frac{3}{2}.$$

Infine, scrivendo

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)},$$

applichiamo il criterio del confronto asintotico osservando che

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

La serie è dunque convergente.

Esercizio 3. Utilizziamo le coordinate cilindriche in tre dimensioni:

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= z. \end{aligned}$$

In queste coordinate,

$$V = \left\{ (\varrho, \vartheta, z) \mid \sqrt{2} < \varrho < 2,\ 0 \le \vartheta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Pertanto l'integrale vale

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^2 \varrho \sin\vartheta \, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_{\varrho=\sqrt{2}}^{\varrho=2} d\vartheta \, dz = 0$$

poiché $\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = 0$.

Esercizio 4. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^{y-1} + y^x \log y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x y^{x-1} + x^y \log x. \end{aligned}$$

Poiché $f(1,1) = 2$, troviamo l'equazione del piano tangente:

$$z = 2 + (x-1) + (y-1) = x + y.$$

Esercizio 5. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin della tabella allegata al compito per il logaritmo, e scrivendo $-x^2/2$ al posto di x, troviamo

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k \cdot 2^k}$$

valido per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Avendo a disposizione questa formula e ricordando lo sviluppo della funzione seno, troviamo infine

$$T_4(x) = x - \frac{2}{3}x^3.$$

Esercizio 6. $\gamma(t) = (t, t^2+1)$, $\gamma'(t) = (1, 2t)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{4+t-(t^2+1)^2}{\sqrt{1+4t^2}}\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 (4+t-1-t^4-2t^2)\mathrm{d}t = 3t + \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\Big|_0^1$$
$$= 3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{79}{30}.$$

Esercizio 7. Calcolo il determinante di A: $4(k^2+2k-3)$ che è zero se $k=1$ oppure $k=-3$. Dunque il sistema ha una unica soluzione quando $k \neq 1, -3$.

Se $k=1$ ho

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e il rango di A è 2 (ad esempio la sottomatrice 2×2 fatta con le prime due righe e colonne ha determinante non nullo). La matrice $A|\mathbf{b}$ ha ancora rango 2 (le ultime due righe sono uguali), quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k=-3$ ho

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

A ha rango 2 (non ha rango 3 perché ha determinante zero e ha una sottomatrice 2×2 a determinante non nullo). $A|\mathbf{b}$ ha rango 3 perché la matrice 3×3 fatta dalle prime due colonne di A più $\mathbf{b}$ ha determinante non nullo. Il sistema è allora impossibile e non ha soluzioni.

Per la perpendicolarità, faccio il prodotto scalare delle ultime due righe e lo pongo a zero: $4+k=0$, da cui $k=-4$.

Esercizio 8.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono gli zeri del determinante di $A - \lambda I$, cioè 1, 2 e 3, Si può notare che $(1,0,0)^T$ è mandato in 3 volte se stesso e dunque lui e tutti i suoi multipli sono autovettori relativi a 3, oppure si può risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 2-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

trovando che gli autovettori sono del tipo $(k, 0, 0)^T$, con $k \in \mathbb{R}$.