Istituzioni di Matematica II – 22 Giugno 2015

Nome e cognome	Matricola

Esercizio 1. Dato il sistema lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&k^2x + ky + 3kz = k^2 - k + 2\\
&x + 5z = k + 3\\
&2x + y + 3z = k,
\end{aligned}$$

discuterlo al variare di k e risolverlo per $k = 1$. Per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo con la stessa matrice A dei coefficienti ammette soluzioni non nulle?

Esercizio 2. Sono assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se i vettori riga di A sono linearmente indipendenti.

(b) Calcolare $u = Ab$, $\|u\|$ e dire se i vettori u e b sono ortogonali.

(c) Calcolare gli autovalori della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e i relativi autovettori.

Esercizio 3. Sviluppare in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = \sqrt[3]{1 + 4x^2}$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo. Scrivere il polinomio di MacLaurin T_5 della funzione $g(x) = f(x) + \sin x$.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di definizione D di $f(x, y) = \log(2x - y) - \log(3y - x) + x^2y^3$ e rappresentarlo nel piano cartesiano. Calcolare $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ in D e $\nabla f(2, 1)$.

Esercizio 5. Stabilire, motivando la risposta, se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - 2\sqrt{n} + 1\right) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Esercizio 6. Data la funzione $f(x, y) = x^2y - 9y + 4x + 5$, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$. Determinare infine i punti di massimo e di minimo vincolati sul segmento $y = x$, per $x \in [0, 3]$.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma (xy + 2y)\, ds$, dove $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\pi/2, 0]$.

Esercizio 8. Calcolare

$$\int_D \frac{\log z}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy\, dz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 3,\ 1 \le z \le 2\}$.

Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di funzioni elementari

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} && \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k && \text{per ogni } x \in (-1,1)\\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k && \text{per ogni } x \in (-1,1)\\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} && \text{per ogni } x \in (-1,1).
\end{aligned}
$$

Può essere utile ricordare che, per ogni α e $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$