Soluzioni

Daniela Bertacchi Simone Secchi

22 Giugno 2015

Esercizio 1 Riscriviamo il sistema nella forma matriciale $Ax = b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} k^2 & k & 3k \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} k^2 - k + 2 \\ k+3 \\ k \end{pmatrix}.$$

Si calcola che $\det A = 10k - 5k^2$. Quindi il sistema è determinato per ogni k diverso da 0 e da 2. Per $k = 0$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

palesemente impossibile a causa della prima riga nulla in corrispondenza del termine noto 2. Per $k = 2$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Osserviamo che la terza riga (sia di A che di b) è multipla della prima. Invece la prima e la seconda sono linearmente indipendenti dunque il rango di A è 2. D'altra parte $\operatorname{rg}(A|b) = 2$ perché il determinante di ciascuna tre sottomatrici che si ottengono sostituendo ad una colonna di A il vettore b vale 0. Quindi il sistema è indeterminato, e possiede ∞^1 soluzioni.

Per $k = 1$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unica soluzione è il vettore $(x, y, z)^T = (-1, 0, 1)^T$.

Ricordiamo che il sistema omogeneo $Ax = 0$ possiede soluzioni non nulle se e solo se la matrice A non è invertibile, cioè se e solo se $\det A = 0$. Quindi gli unici valori di k per i quali il sistema $Ax = 0$ possiede soluzioni non nulle sono $k = 0$ e $k = 2$. *Attenzione!* Questa conclusione non contraddice il fatto che il sistema fosse impossibile per $k = 0$. La ragione è che il vettore a secondo membro (si veda l'equazione (1)) non era il vettore nullo.

Esercizio 2 (a) Il determinante di A è 5, dunque diverso da 0 quindi le righe di A sono linearmente indipendenti.

(b) $u = (4, 2, 6)^T$ e la sua lunghezza è $\sqrt{16 + 4 + 36} = 2\sqrt{14}$. Il prodotto scalare di u e b vale $4 - 2 + 6 \neq 0$ quindi u e b non sono ortogonali.

(c) Gli autovalori sono le soluzioni λ di

$$det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 1 = 0$$

dunque $\lambda_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$. Gli autovettori relativi a λ_i si trovano risolvendo il sistema in v_1, v_2:

$$\begin{cases}(2-\lambda_i)v_1 + v_2 = 0\\ v_1 + (5-\lambda_i)v_2 = 0\end{cases}$$

Si ricava

$$\begin{cases}v_2 = (\lambda_i - 2)v_1\\ v_1(1-(2-\lambda_i)(5-\lambda_i)) = 0\end{cases}$$

ma la seconda equazione è una identità qualunque sia il valore di v_1 $(1-(2-\lambda_i)(5-\lambda_i)) = 0)$, perciò gli autovettori relativi a λ_i sono $v_1 = k$ e $v_2 = k(\lambda_i - 2)$, ovvero

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{pmatrix}, \text{ per } \lambda = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ \frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{pmatrix} \text{ per } \lambda = \frac{7-\sqrt{13}}{2}.$$

Esercizio 3 Utilizziamo lo sviluppo di MacLaurin di $(1+z)^\alpha$ con $\alpha = 1/3$ e $z = 4x^2$:

$$\sqrt[3]{1+4x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}1/3\\ k\end{pmatrix}(4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}1/3\\ k\end{pmatrix}4^k x^{2k}.$$

Questo sviluppo è valido per $-1 < 4x^2 < 1$, cioè per $-1/2 < x < 1/2$. Confrontando con lo sviluppo della funzione seno troviamo infine

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{16}{9}x^4 + \frac{x^5}{120}.$$

Esercizio 4 Il dominio di definizione D è costituito dalle coppie (x, y) di numeri reali tali che $2x - y > 0$ e $3y - x > 0$. Quindi $y < 2x$ e $y > x/3$. Nel piano cartesiano è la regione compresa fra le due rette di equazioni $y = 2x$ e $y = x/3$.

Applicando le regole di derivazione otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{2}{2x-y} + \frac{1}{3y-x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - \frac{1}{2x-y} - \frac{3}{3y-x}.$$

Ricordando la definizione del vettore gradiente e inserendo $x = 2$, $y = 1$, troviamo

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix}17/3\\ 26/3\end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Essendo una serie a termini positivi dall'aspetto non proprio familiare, utilizziamo il criterio del confronto asintotico:

$$(n - 2\sqrt{n} + 1)\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Dal momento che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, anche la nostra serie converge.

Esercizio 6 Poiché
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 9,$$
possiamo trovare facilmente i punti critici della funzione annullando entrambe le derivate parziali. I punti sono $P = (-3, 2/3)$ e $Q = (3, -2/3)$. La matrice hessiana nel generico punto (x, y) vale
$$H = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$
e pertanto
$$H(P) = \begin{bmatrix} 4/3 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$
mentre
$$H(Q) = \begin{bmatrix} -4/3 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$
Poiché il determinante di entrambe le matrici è negativo, P e Q sono due punti di sella. Non esistono punti di massimo o di minimo locale.

Sul segmento di equazione $y = x$ con $0 \leq x \leq 3$ la funzione diventa
$$f(x, x) = x^3 - 5x + 5.$$
Derivando rispetto a x otteniamo $3x^2 - 5$, con l'unica soluzione ammissibile $x = \sqrt{5/3}$. Il punto $(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$ è un minimo vincolato. A questo punto non dobbiamo dimenticare di calcolare il valore della funzione nei punti estremi del segmento:
$$f(0, 0) = 5, \quad f(3, 3) = 17.$$
Possiamo finalmente concludere che la funzione vincolata al segmento presenta un punto di minimo assoluto in $(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$, e un punto di massimo assoluto in $(3, 3)$.

Esercizio 7 Risulta
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$
e conseguentemente $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4} = 2$. L'integrale curvilineo diventa
$$\int_\gamma (xy + 2y)\, ds = 2\int_{-\pi/2}^{0} (4\sin t\cos t + 4\sin t)\, dt = -12.$$

Esercizio 8 L'uso delle coordinate cilindriche in $\mathbf{R}^3$ appare qui naturale. Posto
$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z,$$
esprimiamo il dominio di integrazione D nelle nuove coordinate:
$$\widetilde{D} = \left\{(\varrho, \varphi, z) \mid 1 \leq \varrho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 1 \leq z \leq 2\right\}$$
e calcoliamo
$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{D}} \frac{\log z}{\varrho^3}\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz &= \int_{\widetilde{D}} \frac{\log z}{\varrho^2} d\varrho\, d\varphi\, dz \\ &= \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{d\varrho}{\varrho^2}\right) \cdot 2\pi \cdot \int_1^2 \log z\, dz \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2\pi \cdot (\log 4 - 1) \end{aligned}$$