Soluzioni degli esercizi del 18 novembre 2014

D. Bertacchi S. Secchi

28 novembre 2014

Esercizio 1. (a) Applichiamo il criterio del confronto asintotico. Poiché, per $n \to +\infty$,

$$(n-1)(2\sqrt{n}+5)\sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente, deduciamo che anche la serie proposta è divergente.

(b) Con semplici manipolazioni algebriche,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 5^{3-n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot 5^3 = 5^3\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}-1\right)\\ &= \frac{2}{3}\cdot 125 = \frac{250}{3}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Infine,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 5^{3-n} + \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{251}{3}.$$

Esercizio 2. Risulta

$$\begin{aligned}\log(2-x^2) &= \log 2 + \log\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n}\\ &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}\\ &= \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}.\end{aligned}$$

Questo sviluppo è valido per

$$-1 < -\frac{x^2}{2} < 1,$$

cioè per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Infine, ricordando i primi termini della serie di MacLaurin del seno, troviamo

$$T_6(x) = \log 2 - \frac{x^2}{2} - \frac{9}{8}x^4 + \frac{x^6}{8} + O(x^7).$$

Esercizio 3. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy + y - 1)\, e^{y+x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (xy + x - 1)\, e^{y+x}.$$

Equazione del piano tangente: $z = e^2 x + e^2 y - 2e^2$.
Equazione del piano parallelo: $z = e^2 x + e^2 y - 5e^2 + 4$.

Esercizio 4. Troviamo i punti critici:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -9 + 2x + 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4y = 0. \end{cases}$$

Dunque gli unici punti critici sono

$$P_1 \left(\frac{-1 - 2\sqrt{7}}{3} \right), \qquad P_2 \left(\frac{-1 + 2\sqrt{7}}{3} \right)$$

La matrice hessiana è

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + 6x & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nel punto P_1 la matrice è definita negativa (due autovalori negativi), sicché P_1 è un punto di massimo locale. Nel punto P_2 la matrice è indefinita (due autovalori di segno opposto), sicché P_2 è un punto di sella.

Esercizio 5. Risulta

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix},$$

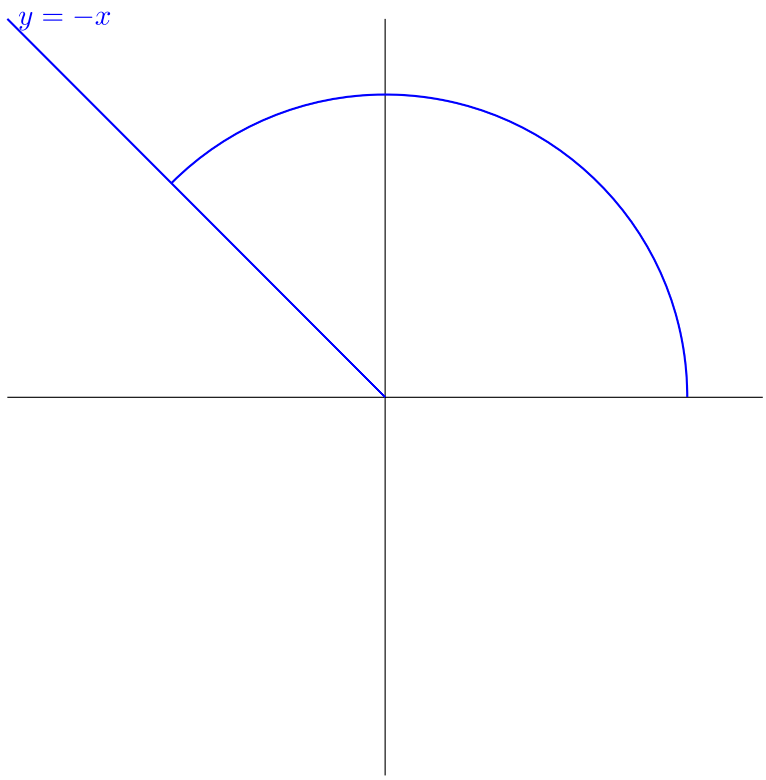
e quindi

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 2.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_\gamma (y - 2x)\, ds &= \int_0^{2\pi} (2\sin t - 4\cos t) \cdot 2\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4\sin t - 8\cos t)\ dt = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Il dominio di integrazione è la porzione di piano interna alla semicirconferenza superiore ($y \geq 0$) di centro l'origine e raggio 2, delimitata dal semiasse positivo delle ascisse e dalla semiretta $y = -x$.



Passando a coordinate polari (ϱ, ϑ), tale regione è descritta dalle condizioni

$$0 \le \varrho < 2, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{3}{4}\pi.$$

Quindi l'integrale proposto si calcola come

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \varrho \cos\vartheta \;\, \varrho \sin\vartheta \;\, e^{\varrho^4} \;\, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta &= \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^3 e^{\varrho^4} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\varrho \;\, d\vartheta \\ &= \int_0^2 \varrho^3 e^{\varrho^4} \, d\varrho \;\, \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \\ &= \frac{e^{16}-1}{16}.\end{aligned}$$

Esercizio 7.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Allora $\det(A - \lambda I) = 0$ se e solo se $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -4$.

- Caso $\lambda = 1$: gli autovettori sono le soluzioni di $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ si tratta di risolvere

  $$\begin{cases} v_2 = v_1 \\ 4v_1 - 3v_2 = v_2 \end{cases}$$

  che ha come soluzione ogni $\mathbf{v} = (k, k)^T$ con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Caso $\lambda = -4$: gli autovettori sono le soluzioni di $A\mathbf{v} = -4\mathbf{v}$. Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ si tratta di risolvere
$$\begin{cases} v_2 = -4v_1 \\ 4v_1 - 3v_2 = -4v_2 \end{cases}$$
che ha come soluzione ogni $\mathbf{v} = (k, -4k)^T$ con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 8. Scriviamo il sistema in forma matriciale:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 4k+1 & 3 \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$
Chiamando A la matrice del sistema, $\det(A) = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 0$ ha soluzioni $k = 0$ e $k = -1$.
Discussione del sistema.

- Per $k \neq 0, -1$ il sistema è determinato (ha un'unica soluzione).
- Caso $k = 0$.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 2 mentre, siccome il termine noto è $(0, 0, 1)^T$, il rango di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$
vale 3, quindi il sistema è impossibile.
- Caso $k = -1$.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ha rango 2 e, siccome il termine noto è $(5, 0, 0)^T$, il rango di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
vale 2, quindi il sistema è indeterminato ed ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Soluzione per $k = 1$: per quanto detto sopra avremo una unica soluzione, che si può determinare o usando la formula risolutiva o anche pe via diretta sul sistema:
$$\begin{cases} x + z = -5 \\ 5y + 3z = 0 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$
Si ottiene la soluzione: $(-25/4, -3/4, 5/4)^T$.