Soluzioni

17 febbraio 2015

Esercizio 1. La funzione è palesemente differenziabile in tutto il dominio di definizione, essendo un polinomio nelle variabili x e y. Le derivate parziali valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x.$$

Uguagliando a zero e sostituendo, troviamo che l'unico punto critico è l'origine $O = (0,0)$. La matrice Hessiana è

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $2 > 0$ e $\det f''(0,0) = 3 > 0$, concludiamo che l'origine è un punto di minimo relativo. Inoltre $f(0,0) = -8$.

Sui segmenti che delimitano il quadrato la funzione vale

$$\begin{aligned} f(x, x+1) &= -7 + x + x^2, \quad -1 \le x \le 0 \\ f(x, 1-x) &= -7 - 3x + 3x^2, \quad 0 \le x \le 1 \\ f(x, x-1) &= -7 - x + x^2, \quad 0 \le x \le 1 \\ f(x, -1-x) &= -7 + 3x + 3x^2, \quad -1 \le x \le 0 \end{aligned}$$

Si tratta di quattro parabole i cui grafici sono rappresentati nelle quattro figure seguenti. In particolare ognuna di queste funzioni raggiunge il minimo assoluto per $x = -1/2$ oppure per $x = 1/2$, e il massimo assoluto nei due estremi dell'intervallo di definizione. Nei punti di minimo assoluto le funzioni assumono valori strettamente maggiori di $f(0,0) = -8$.

Deduciamo quindi che la funzione possiede un punto di minimo assoluto nell'origine, e quattro punti di massimo assoluto nei vertici del quadrato.

Esercizio 2. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(3k^2 \log \frac{2k^2+2}{2k^2+1}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} 3k^2 \log \frac{2k^2+2}{2k^2+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3k^2}{2k^2+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

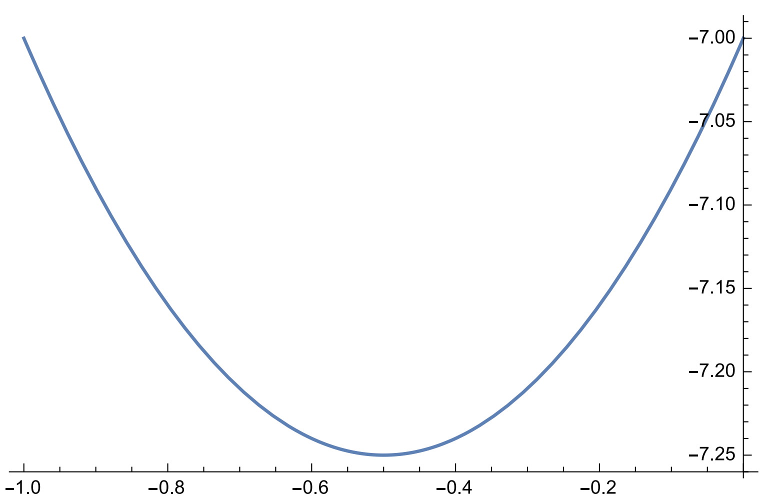


Figura 1: Grafico della funzione $f(x, x+1) = -7 + x + x^2$.

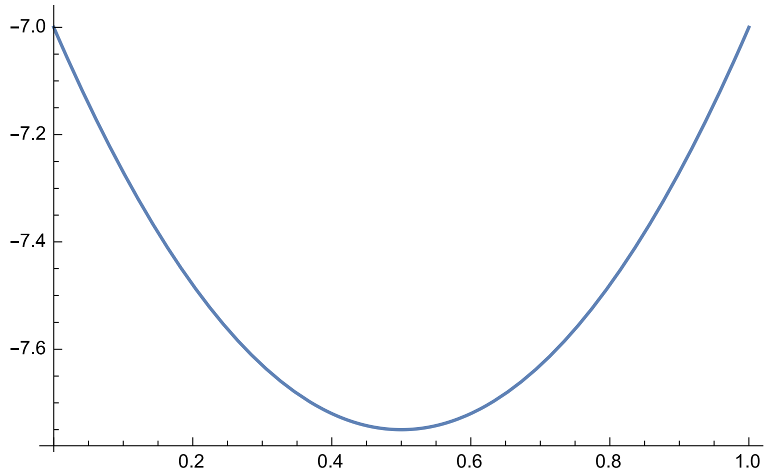


Figura 2: Grafico della funzione $f(x, 1-x) = -7 - 3x + 3x^2$.

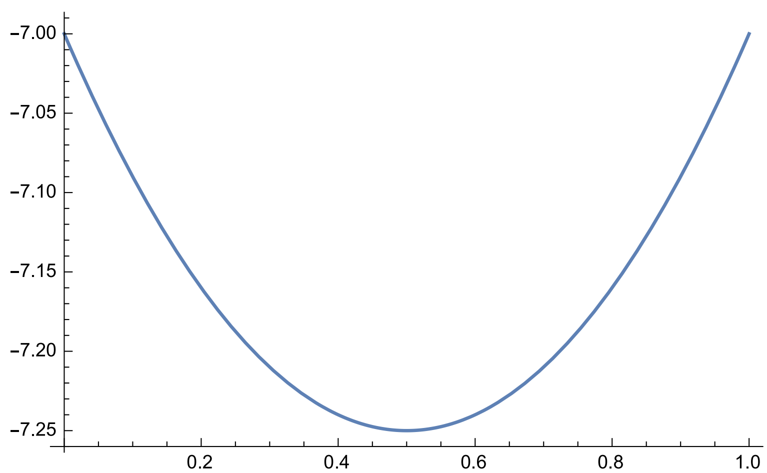


Figura 3: Grafico della funzione $f(x, x-1) = -7 - x + x^2$.

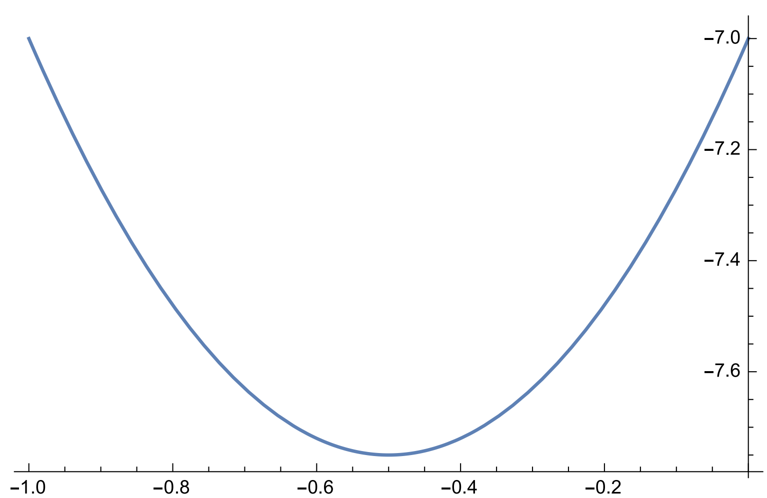


Figura 4: Grafico della funzione $f(x, -1-x) = -7 + 3x + 3x^2$.

Pertanto la serie proposta è divergente.

Per trattare la seconda serie, poniamo $z = (\log x)^2 \geq 0$, trovando

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2z)^k.$$

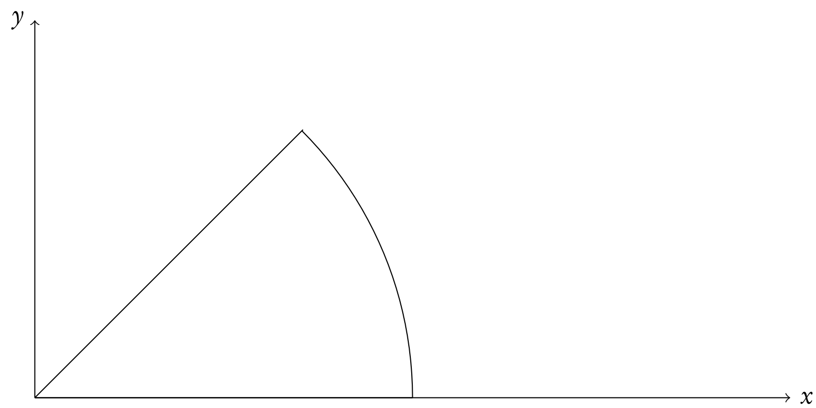
Questa serie geometrica converge per $0 \leq 2z < 1$, cioè per $0 \leq z < 1/2$. Tornando alla variabile x, l'intervallo di convergenza diventa $(-e^{\sqrt{2}/2}, e^{\sqrt{2}/2})$. Per $z = 1/2$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = +\infty$$

e per parità deduciamo che agli estremi $x = \pm e^{\sqrt{2}/2}$ la serie proposta diverge.

Esercizio 3. Passando a coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, l'integrale si riduce a

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^2 \frac{\rho}{1+\rho} d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4}\left[\rho - \log(1+\rho)\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}(2 - \log 3).$$



Esercizio 4. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy) - y(x+y)\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) - x(x+y)\sin(xy).$$

Poiché $f(0,0) = 0$, l'equazione del piano tangente è

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = x + y.$$

Esercizio 5. Ricordando lo sviluppo di Taylor valido per $-1 < \varepsilon < 1$

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n\, n!}\varepsilon^n$$

e posto $\varepsilon = -x^2$ otteniamo lo sviluppo

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n\, n!}x^{2n}$$

valido per $-1 < x < 1$.

Esercizio 6. Risulta

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) = 4.$$

Pertanto

$$\int_\gamma (x - 2y)\, ds = \int_0^{\pi} (\cos(2t) - 2\sin(2t)) \cdot 2\, dt = 0.$$

Esercizio 7. La matrice associata al sistema è

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 2+\kappa & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale $\det A_\kappa = 4k$. Se $\kappa \neq 0$, il sistema possiede una ed una sola soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 - 3\kappa - 2\kappa^2}{4\kappa} \\ -\dfrac{1+\kappa}{\kappa} \\ \dfrac{2 + 5\kappa + 2\kappa^2}{4\kappa} \end{pmatrix}$$

Se invece $\kappa = 0$, il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e si verifica per sostituzione o applicando la regola di Cramer che questo sistema è impossibile.

Esercizio 8. Per determinare la matrice associata all'applicazione lineare f, basta mettere in colonna i due vettori forniti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono 0 e 7, come si vede risolvendo l'equazione

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 0.$$