Istituzioni di Matematica II – 16/9/2015

Nome e cognome	Matricola

Esercizio 1. Dato il sistema lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2k \\ 2x + y = 2k \\ x + \frac{k}{3}y - z = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

discutere il numero di soluzioni al variare di k e risolverlo per $k = 1$.

Esercizio 2. Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $f(x) = \log(1 + 2x^2)$, centrato in $x_0 = 0$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo.

Scrivere poi lo sviluppo ti Taylor della funzione $f(x) = \log x$ centrato in $x_0 = 1$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo.

Esercizio 3. Determinare il carattere delle serie numeriche

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \log n}{(n + \cos n)^3}.$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \sqrt{1 - y^2}\, ds$, dove $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ per $0 \leq t \leq \pi$.

Esercizio 5. Rappresentare nel piano l'insieme D e calcolare l'integrale $\iint_D x\, dx\, dy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ (x - 1)^2 \leq y \leq x + 1\}$.

Esercizio 6. a. Data la funzione $f(x, y) = -\frac{y^2}{2} + y \cdot e^x - 2x$, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

b. Determinare infine i punti di massimo e di minimo vincolati sul segmento che unisce i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

c. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 0, f(0, 0))$.

Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1).$$

Può essere utile ricordare che, per ogni α e $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$