Soluzioni

8 luglio 2015

Esercizio 1. Consideriamo la matrice dei coefficienti A e il termine noto $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k}{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2k \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è $2k-2$, quindi è diverso da zero per $k \neq 1$. Se $k \neq 1$ il sistema è determinato ed ha dunque una unica soluzione.

Per $k = 1$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e A ha rango 2, avendo per esempio la sottomatrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avente determinante non nullo. La matrice $A|\mathbf{b}$ ha anche essa rango 2 in quanto la colonna $\mathbf{b}$, usata per orlare la sottomatrice C, dà la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

che ha determinante zero, quindi ha rango 2. Il sistema per $k = 1$ risulta indeterminato, con ∞^1 soluzioni. La soluzione è la retta

$$x = 3z; \quad y = 2 - 6z; \quad z \in \mathbf{R};$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 2. Utilizziamo lo sviluppo di MacLaurin

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$$

con $z = 2x^2$. Dunque

$$\log(1+2x^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} 2^k x^{2k}.$$

Tale sviluppo vale per $2x^2 < 1$, cioè per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$. Per completare l'esercizio, scriviamo

$$\log x = \log(1 + (x-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k,$$

che è una serie di Taylor centrata in $x_0 = 1$. L'intervallo di convergenza è $-1 < (x-1) < 1$, cioè $0 < x < 2$.

Esercizio 3. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ è una serie a termini *negativi*: infatti $1 - \frac{1}{n^2} < 1$ per ogni $n \geq 2$, e pertanto il logaritmo è negativo. Possiamo studiare equivalentemente la serie a termini *positivi* $\sum_{n=2}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, alla quale è naturale applicare un criterio di confronto asintotico basato sulla relazione per $n \to +\infty$

$$-\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, lo stesso possiamo dire della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

La seconda serie proposta è una serie a termini positivi (almeno per $n \gg 1$). Ricordando che

$$\frac{n + \log n}{(n + \cos n)^3} \sim \frac{n\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)}{n^3\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)^3} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

applichiamo nuovamente il criterio del confronto asintotico con la serie convergente $\sum_n \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 4. Si ha $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.

$$\int_\gamma \sqrt{1 - y^2}\, ds = \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 t} dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t} dt = \int_0^\pi |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t\, dt = -\cos t|_0^\pi = 2.$$

Esercizio 5. La regione D del piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ è racchiusa fra la parabola $y = (x-1)^2$, la retta $y = x + 1$ e la retta verticale $x = 2$. Per calcolare l'integrale doppio, utilizziamo la formula di riduzione integrando prima rispetto a y e poi rispetto a x:

$$\begin{aligned}\int_D x\, dx\, dy &= \int_0^2 \left(\int_{(x-1)^2}^{x+1} dy\right) x\, dx = \int_0^2 \left(x + 1 - (x-1)^2\right) x\, dx \\ &= \int_0^2 3x^2 - x^3\, dx = \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=2} = 4.\end{aligned}$$

Esercizio 6.

a. Le derivate parziali valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^x - 2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -y + e^x.$$

I punti stazionari sono soluzione di

$$0 = y \cdot e^x - 2; \qquad 0 = -y + e^x$$

che ha unica soluzione $x = \frac{1}{2}\log 2 = \log(\sqrt{2})$, $y = e^x = \sqrt{2}$, cioè $P = (\log(\sqrt{2}), \sqrt{2})$. Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot e^x; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x.$$

In P la matrice hessiana diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante -4 quindi P è una sella.

b. Il segmento richiesto ha equazione $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, e la funzione diventa funzione della sola x: $f(x, 0) = -2x$ che è strettamente decrescente. Quindi $(0, 0)$ è il massimo sul vincolo e $(1, 0)$ è il minimo.

c. L'equazione è

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot (y - 0)$$

che diventa

$$z = -2x + y.$$