Soluzioni

9 aprile 2015

Esercizio 1. Calcolo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 2y; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x.$$

I punti stazionari sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $O = (0,0)$, $P = (\sqrt{2}, 1)$ e $Q = (-\sqrt{2}, 1)$. Devo calcolare l'hessiana nei tre punti:

$$H(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad H(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}; \qquad H(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

$H(O)$ ha due autovalori positivi (2 con molteplicità due) dunque O è un minimo. P e Q sono invece selle in quanto il determinante della hessiana è negativo (ricordiamo che il determinante è il prodotto degli autovalori).

Sul perimetro del triangolo dobbiamo parametrizzare i bordi: chiamiamo $A = (0,1)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,0)$. C coincide con O che abbiamo già mostrato essere minimo, quindi sarà minimo anche sul perimetro del triangolo.

Il lato CA ha parametrizzazione $x = 0, y = t$, con $t \in [0,1]$. La f su CA ha espressione t^2 che è crescente in t, dunque cresco andando da C a A.

Il lato AB ha parametrizzazione $x = t, y = -t+1$, con $t \in [0,1]$. La f su AB ha espressione $g(t) = t^3+t^2-2t-2$. Per capire dove cresce, calcolo $g'(t) = 3t^2+2t-2$ che in $[0,1]$ è positiva per $t \in (\frac{\sqrt{7}-1}{3}, 1]$, e negativa per $t \in [0, \frac{\sqrt{7}-1}{3})$ dunque decresco andando da A a $T = (\frac{\sqrt{7}-1}{3}, -\frac{\sqrt{7}-1}{3} - 1)$ e cresco da T a B..

Il lato CB ha parametrizzazione $x = t, y = 0$, con $t \in [0,1]$. La f su CB ha espressione t^2 che è crescente in t, dunque cresco andando da C a B.

Dunque C e T sono punti di minimo, mentre A e B sono punti di massimo sul perimetro del triangolo.

Esercizio 2. Osserviamo che

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

sicché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots = 1$$

per cancellazione telescopica di tutti gli addendi tranne il primo.

Per studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dove

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Quindi la serie proposta converge.

Esercizio 3. Il dominio di integrazione è rappresentato in coordinate polari $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ dalle condizioni

$$1 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi

$$\iint_E (x + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left(\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{7}{3}\cos\theta + \frac{15}{4}\sin^2\theta\right) d\theta = \frac{7}{3} + \frac{15}{16}\pi.$$

Esercizio 4. Le derivate parziali valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \cos(x - y) - \sin(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x - y) - \sin(x + y).$$

Poiché l'equazione del piano tangente è, per definizione,

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y,$$

concludiamo che

$$z = 1 + 2x - y.$$

Esercizio 5. Osservando che

$$\frac{2}{3 - 4x} = \frac{2}{3\left(1 - \frac{4}{3}x\right)},$$

possiamo porre $r = (4/3)x$ e scrivere

$$\frac{2}{3 - 4x} = \frac{2}{3}\frac{1}{1 - r} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n x^n.$$

Questa formula è valida per $|r| < 1$, cioè per $|x| < 3/4$.

Esercizio 6. Risulta $\gamma'(t) = (-\frac{3}{2}\sin(3t), \frac{3}{2}\cos(3t))$, da cui $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{9}{4}\sin^2(3t) + \frac{9}{4}\cos^2(3t)} = \frac{3}{2}$. L'integrale richiesto diviene:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{3}{4}\sin(3t)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2(3t)\right) dt &= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{4}\sin(3t)\frac{1}{4}\cos^2(3t)dt \\ &= -\frac{1}{3\cdot 16}\cos^3(3t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}+4}{12\cdot 16}.\end{aligned}$$

Esercizio 7. La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} \kappa^2 & \kappa & 3\kappa \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \kappa^2 - \kappa + 2 \\ \kappa + 3 \\ \kappa \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A vale $\kappa(\kappa - 1)$ quindi è nullo solo per $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$.

Per $\kappa \neq 0, 1$ il sistema è determinato ovvero ha una unica soluzione.

Per $\kappa = 1$ la matrice A ha determinante nullo, quindi il suo rango è minore o uguale a 2. Ha una sottomatrice 2x2 con determinante non nullo (ad esempio quella formata dalle prime due righe e prime due colonne), perciò il rango è 2. La matrice A aggiunto $\mathbf{b}$ è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

L'ultima colonna non è combinazione delle prime due, come si può notare calcolando il determinante della matrice composta dalle prime colonne e dall'ultima e osservando che è diverso da zero. Dunque l'aggiunta dell'ultima colonna aumenta il rango, $\text{rg}(A|b) = 3 > \text{rg}(A) = 2$. Il sistema è impossibile.

Per $\kappa = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (ha una sottomatrice 2x2 con determinante non nullo) mentre $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice aumentata

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 5 & | & 3 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 perché ha una sottomatrice 3×3 con determinante non nullo (ad esempio quella con le ultime 3 colonne). Il sistema è in questo caso impossibile.

Il sistema omogeneo ha soluzioni non nulle se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Perciò tale sistema avrà soluzioni non nulle per $\kappa = 0$ oppure $\kappa = 1$.

Esercizio 8. La matrice che rappresenta L è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'immagine di $(0, 1, 0)^T$ è la seconda colonna: $(0, 1, 5)^T$. L'immagine di $(-3, 2, 5)^T$ è

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La applicazione L è invertibile se e solo se il determinante di A è diverso da zero. Tale determinante è 10-4=6, perciò la risposta è affermativa.