Istituzioni di Matematica II – 08 Luglio 2015

Nome e cognome	Matricola

Esercizio 1. Dato il sistema lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 9 - k \\ 5x + y + 2z = \frac{k}{3} + 1 \\ kx + y + z = k - 1, \end{cases}$$

discutere il numero di soluzioni al variare di k e risolverlo per $k = 9$.

Esercizio 2. Calcolare, in dipendenza dal parametro reale k, il rango di A

$$A = \begin{bmatrix} k & k+1 & 3 \\ 2 & 3 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di k i due vettori riga sono ortogonali.

Esercizio 3. Sviluppare in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = 1/(1+5x)$, indicando l'intervallo in cui vale lo sviluppo. Scrivere il polinomio di MacLaurin T_4 della funzione $g(x) = x\,(f(x) + \sin(2x))$.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di definizione D di $f(x,y) = x\log(1-y^2) + \frac{y+1}{\sqrt{x}}$ e rappresentarlo nel piano cartesiano. Calcolare $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ in D. Scrivere l'equazione del piano tangente in $P = (1, 0, f(1,0))$ e determinare la direzione di massima crescita di f in (1,0).

Esercizio 5. Stabilire, motivando la risposta, se converge la serie numerica

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{n^2-2n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 6. Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$. Determinare infine i punti di massimo e di minimo vincolati sull'insieme formato dai segmenti AB e BC dove $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (1,1)$.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma y(1-y^2)\,ds$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

Esercizio 8. Calcolare

$$\iint_D 12xy\,dx\,dy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1)$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1).$$

Può essere utile ricordare che, per ogni α e $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$