# Soluzioni

8 luglio 2015

**Esercizio 1.** Riscriviamo il sistema nella forma matriciale $Ax = b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9-k \\ \frac{k}{3}+1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $A$ vale $9-k$ perciò il sistema è determinato (ha una unica soluzione) se $k \neq 9$.

Per $k = 9$ il rango di $A$ è chiaramente pari a 2 (non può essere 3 essendo il determinante nullo e vi è almeno una sottomatrice $2 \times 2$ con determinante non nullo). Per $k = 9$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Tutte le matrici $3 \times 3$ ottenute prendendo due colonne di $A$ e $b$ hanno determinante nullo, perciò il rango di $(A|b)$ vale 2 e il sistema è indeterminato con $\infty^1$ soluzioni. Le soluzioni sono la retta $y = -13x + 12$, $z = 4x - 4$, ovvero scritto in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -13t+12 \\ 4t-4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** La matrice ha 2 righe e 3 colonne quindi il rango è al massimo 2. Vale almeno 1 perché ci sono elementi (il 2 e il 3) che sono sempre diversi da zero. La sottomatrice $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} k & k+1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

ha determinante $k - 2$ quindi per $k \neq 2$ il rango è pari a 2. Per $k = 2$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

che ha evidentemente rango 1 (tutte le colonne sono multiple della prima).

I due vettori riga sono ortogonali per definizione se il loro prodotto scalare lo è. Il prodotto scalare vale $8k+6$ quindi sono ortogonali se $k=-\frac{3}{4}$.

**Esercizio 3.** Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin di $1/(1-x)$ con $-5x$ al posto di $x$ troviamo subito

$$\frac{1}{1+5x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-5x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k5^kx^k.$$

Poiché sappiamo che lo sviluppo è valido se $-1<-5x<1$, deduciamo che $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}$. Per quanto riguarda $g$, ricordando lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione seno otteniamo

$$T_4(x)=x-3x^2+25x^3-\frac{379}{3}x^4.$$

**Esercizio 4.** Imponendo le condizioni di esistenza,

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0,\ -1<y<1\right\}.$$

Le derivate parziali in $D$ valgono

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\log\left(1-y^2\right)-\frac{y+1}{2x^{3/2}}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2xy}{y^2-1}.\end{aligned}$$

Ci procuriamo il valore $f(1,0)=1$ e l'equazione del piano tangente nel punto $(1,0,1)$ è presto trovata:

$$z=1-\frac{1}{2}(x-1)+y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x+y.$$

La direzione di massima crescita è data da $\nabla f(1,0)/\|\nabla f(1,0)\|$. Poiché

$$\nabla f(1,0)=(-1/2,1)^T,$$

risulta che

$$\frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2},1\right)^T.$$

**Esercizio 5.** Utilizziamo il criterio del confronto asintotico, ricordando che $\log(1+\epsilon)\sim\epsilon$ per $\epsilon\to 0$:

$$\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{n^2-2n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\sum_{n=5}^{\infty}\frac{5n}{n^2}\frac{1}{n}\sim\sum_{n=5}^{\infty}\frac{5}{n^2}<+\infty.$$

**Esercizio 6.** Imponendo che il gradiente di $f$ si annulli, troviamo solo $x=0$ e $y=0$. Quindi l'origine è l'unico punto critico. La matrice Hessiana è

$$H=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Questa matrice è definita positiva, dunque $(0,0)$ è un punto di minimo per $f$.

Il segmento $AB$ è parametrizzato da $x = t$ e $y = 0$ con $t \in [0,1]$. Su tale segmento

$$f(x,y) = f(t,0) = t^2$$

che possiede minimo in $t = 0$ e massimo in $t = 1$, cioè rispettivamente in $A$ e in $B$. Calcoliamo $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Invece il segmento $BC$ è parametrizzato da $x = 1$ e $y = t$ con $t \in [0,1]$. Su tale segmento

$$f(x,y) = f(1,t) = t^2 - t + 1.$$

Questa funzione della variabile $t \in [0,1]$ assume minimo assoluto per $t = 1/2$ con valore $3/4$ e massimi assoluti per $t = 0$ e $t = 1$ con valore 1. Concludiamo che il minimo assoluto sull'insieme formato dai segmenti $AB$ e $BC$ vale 0 ed è assunto nel punto $(0,0)$; il massimo assoluto vale 1 ed è assunto nei punti $B$ e $C$.

**Esercizio 7.** Poiché

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1,$$

$$\int_\gamma y(1-y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi \sin t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{3}.$$

**Esercizio 8.** Il dominio di integrazione $D$ è normale rispetto all'asse delle ascisse. Quindi

$$\begin{aligned}\iint_D 12xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 12xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[6xy^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 6x^2 - 6x^5\,\mathrm{d}x = \left[2x^3 - x^6\right]_0^1 = 1.\end{aligned}$$