Soluzioni

26 febbraio 2015

Esercizio 1. Possiamo riscrivere il limite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Una primitiva di xe^{-kx^2} è $F(x)=-\frac{e^{-kx^2}}{2k}$. Pertanto

$$\int_0^1 xe^{-kx^2}\,dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{2k}-\frac{e^{-k}}{2k}=\frac{1-e^{-k}}{2k}.$$

Possiamo calcolare il limite:

$$\lim_{k\to 0+}\frac{1-e^{-k}}{2k}=\lim_{k\to 0+}\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. Funzione razionale fratta, f è definita su tutto l'asse reale poiché il denominatore non possiede zeri. Il suo grafico interseca l'asse delle ascisse nei punti $\left(-\sqrt{2}/2,0\right)$ e $\left(\sqrt{2}/2,0\right)$. Poiché il denominatore è sempre positivo, è anzi immediato dedurre che la funzione è positiva per valori esterni alle due radici $\pm\sqrt{2}/2$ e negativa per valori interni.

Non possono esistere asintoti verticali, giacché la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=2,$$

sicché $y=2$ è asintoto orizzontale bilatero. Questo esclude la presenza di asintoti obliqui.

La derivata prima vale

$$Df(x)=\frac{6x}{(x^2+1)^2},$$

che cambia segno in $x=0$. Pertanto $(0,-1)$ è un punto di minimo assoluto. La derivata seconda

$$D^2f(x)=\frac{6-18x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Gli zeri di questa derivata seconda sono

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La funzione f è concava per valori esterni e convessa per valori interni. In tali valori il grafico presenta due flessi a tangente obliqua.

Abbiamo tutti gli ingredienti per tracciare un grafico qualitativo dell'andamento della nostra funzione, riportato in Figura 1.

Esercizio 4. Innanzitutto vediamo subito che $\sup E=+\infty$, nel senso che E è un insieme illimitato dall'alto. Infatti, basta osservare che $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}=+\infty$. Invece E è limitato dal basso dal valore zero (in quanto la somma di numeri positivi è positiva), ma questa osservazione non è sufficiente a concludere.

Introduciamo la funzione $f(x)=x+1/x$, definita per ogni $x>0$. Poiché $\lim_{x\to 0+}f(x)=+\infty$, deve esistere un punto di minimo assoluto. Calcolando

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

vediamo subito che $x=1$ è l'unico punto di minimo assoluto. Dal momento che $f(1)=1+1=2$, possiamo concludere che $\inf E=2$. Per quanto visto, $2=\min E$, poiché appartiene all'insieme E stesso (per $x=1$).

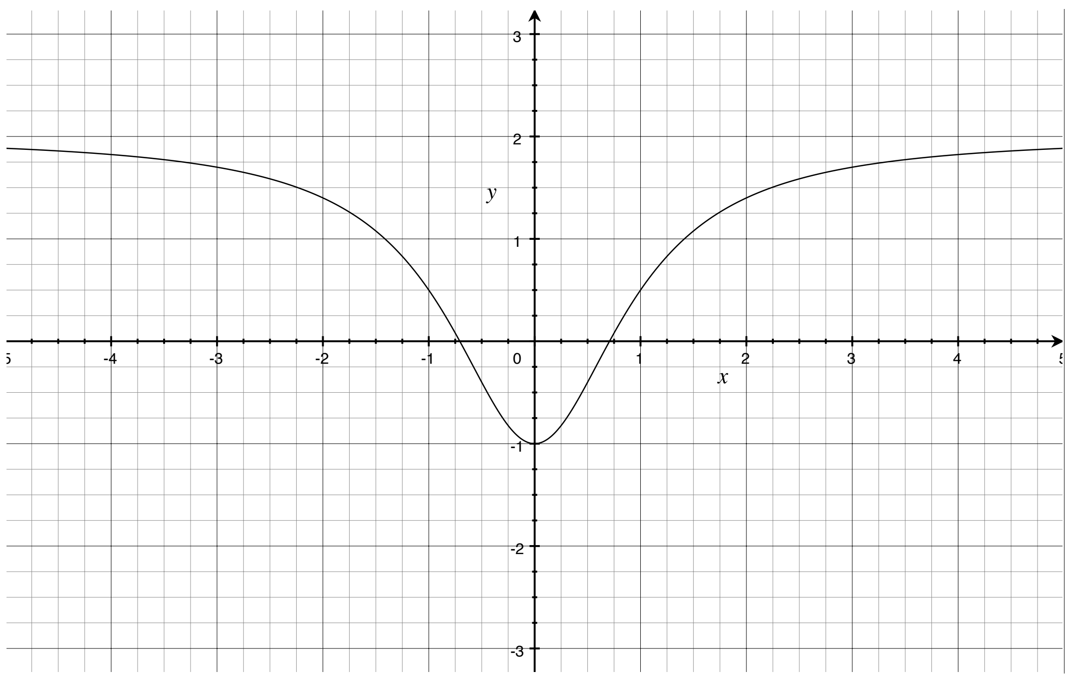

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Soluzioni

26 febbraio 2015

Esercizio 1. Possiamo riscrivere il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(1-x)} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1-x)}{x\log(1-x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{2}{x},$$

e questo limite non esiste: i limiti per eccesso e per difetto sono infiniti di segno opposto.

Esercizio 2. Una primitiva di xe^{-kx^2} è $F(x) = -\frac{e^{-kx^2}}{2k}$. Pertanto

$$\int_0^1 xe^{-kx^2}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2k} - \frac{e^{-k}}{2k} = \frac{1-e^{-k}}{2k}.$$

Possiamo calcolare il limite:

$$\lim_{k\to 0+} \frac{1-e^{-k}}{2k} = \lim_{k\to 0+} \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. Funzione razionale fratta, f è definita su tutto l'asse reale poiché il denominatore non possiede zeri. Il suo grafico interseca l'asse delle ascisse nei punti $\left(-\sqrt{2}/2, 0\right)$ e $\left(\sqrt{2}/2, 0\right)$. Poiché il denominatore è sempre positivo, è anzi immediato dedurre che la funzione è positiva per valori esterni alle due radici $\pm\sqrt{2}/2$ e negativa per valori interni.

Non possono esistere asintoti verticali, giacché la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x^2}{x^2+1} = -2,$$

sicché $y = 2$ è asintoto orizzontale bilatero. Questo esclude la presenza di asintoti obliqui.

La derivata prima vale

$$Df(x) = -\frac{6x}{(x^2+1)^2},$$

che cambia segno in $x = 0$. Pertanto $(0, -1)$ è un punto di massimo assoluto. La derivata seconda

$$D^2 f(x) = -\frac{6-18x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Gli zeri di questa derivata seconda sono

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La funzione f è convessa per valori esterni e concava per valori interni. In tali valori il grafico presenta due flessi a tangente obliqua.

Abbiamo tutti gli ingredienti per tracciare un grafico qualitativo dell'andamento della nostra funzione, riportato in Figura 1.

Esercizio 4. Poiché la funzione $x \mapsto e^x$ è strettamente crescente fra $(0, +\infty)$ e $(1, +\infty)$, possiamo introdurre l'insieme

$$\widetilde{E} = \left\{ z + \frac{1}{z} \mid z > 1 \right\}$$

e affermare che esiste una corrispondenza biunivoca fra i minimi (risp. i massimi) di E e quelli di $\widetilde{E}$. Poiché $\lim_{z\to+\infty} z + \frac{1}{z} = +\infty$, l'insieme $\widetilde{E}$ è illimitato dall'alto, cioè $\sup \widetilde{E} = +\infty$. Analizzando la derivata prima

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

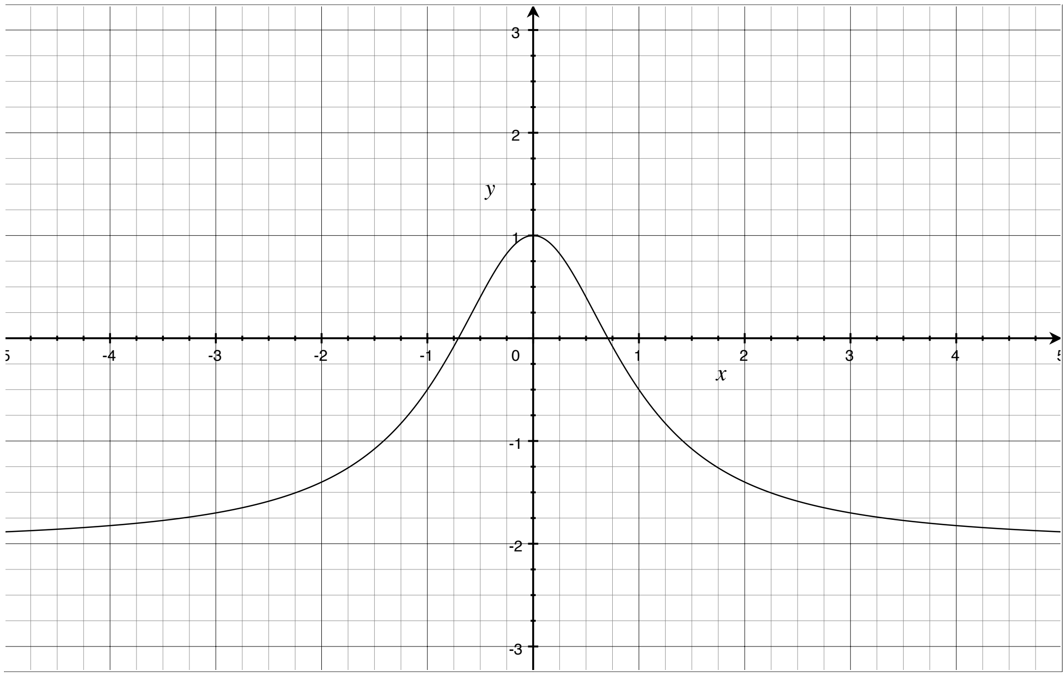

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

di $f(z) = z + \frac{1}{z}$, scopriamo immediatamente che f è strettamente crescente da 1 a $+\infty$, e dunque $\inf \widetilde{E} = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Tuttavia $\min \widetilde{E}$ non è assunto, poiché $z = 1$ non è ammissibile a causa della condizione $z > 1$.