Soluzioni

Simone Secchi

17 settembre 2015

Esercizio 1. La funzione assegnata è un polinomio di quinto grado. Evitiamo di espandere le varie potenze e il prodotto, perché alcune informazioni diventerebbero meno evidenti.

Innanzitutto, la funzione è definita sull'intero asse reale (come tutti i polinomi di una variabile reale). Risulta $f(x) = 0$ esattamente per $x = 1$ e $x = 2$. A causa dell'esponente pari di $x - 1$, il segno di f è determinato dal segno di $x - 2$: la funzione è negativa per $x < 2$ e positiva per $x > 2$. Agli estremi del dominio, valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La funzione non possiede alcun tipo di asintoto (ricordiamolo: è un polinomio di quinto grado), e passiamo all'analisi della derivata prima. Con qualche calcolo, e *senza espandere le potenze*, troviamo

$$f'(x) = (x-2)^2 \left(5x^2 - 12x + 7\right).$$

In particolare, $x = 2$ è un punto critico. Per individuare gli eventuali altri punti critici, risolviamo l'equazione algebrica di secondo grado $5x^2 - 12x + 7 = 0$, che porge $x = 1$ e $x = 7/5$. Dall'espressione della derivata prima capiamo facilmente il segno, e pertanto f cresce fino a $x = 1$, decresce fra $x = 1$ e $x = 7/5$, infine riprende a crescere oltre $x = 7/5$. Nel punto $x = 2$ la derivata prima conserva il suo segno, e quindi è un flesso a tangente orizzontale.

La derivata seconda è presto calcolata:

$$f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 150x - 76.$$

Poiché già sappiamo che $f''(2) = 0$, possiamo fattorizzare la derivata seconda:

$$f''(x) = 2(-2+x)(19 - 28x + 10x^2)$$

e individuare altri due punti di flesso per $x = \frac{14 \pm \sqrt{6}}{10}$.

Riportiamo un grafico qualitativo nella figura 1.

Esercizio 2. L'integrale proposto non è dei più immediati. Procediamo così:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4+x^2}\,dx &= x\sqrt{4+x^2} - \int x\,d\sqrt{4+x^2} = x\sqrt{4+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx \\ &= x\sqrt{4+x^2} - \int \frac{x^2+4-4}{\sqrt{4+x^2}}dx = x\sqrt{4+x^2} - \int \sqrt{4+x^2}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.\end{aligned}$$

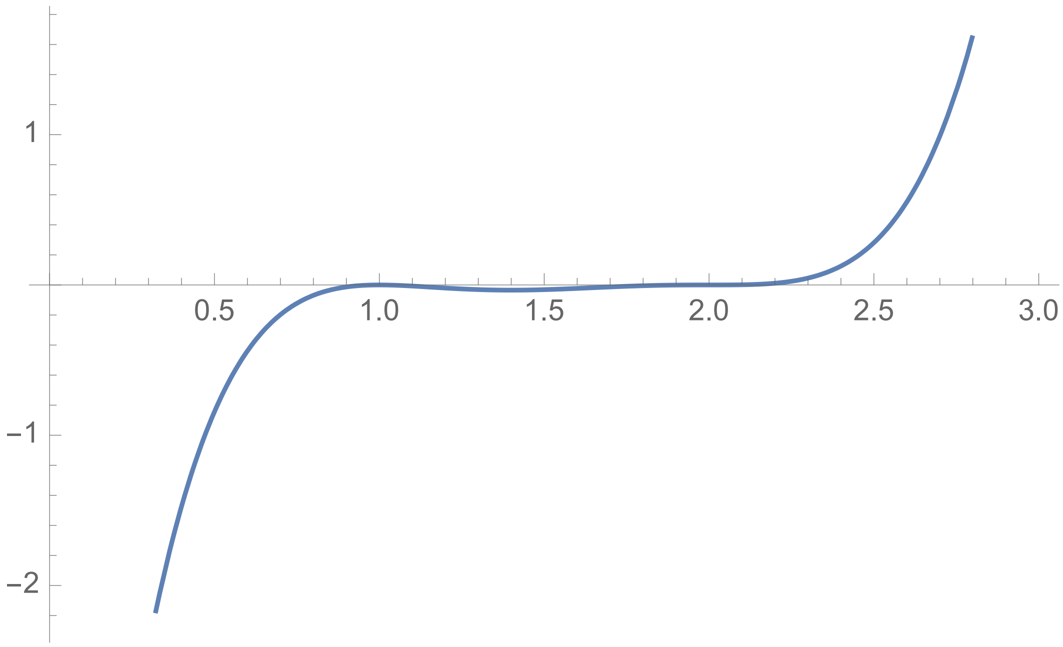


Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Portando $\int \sqrt{4+x^2}dx$ a primo membro,

$$\int \sqrt{4+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}. \tag{1}$$

Resta da calcolare l'ultimo integrale. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x+\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right) \\ &= \int \frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx = \log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

Tornando a (1), arriviamo alla primitiva desiderata:

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + 2\log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C.$$

Esercizio 3. Entrambi i limiti si presentano nella forma di indeterminazione $[0/0]$. È anche facile convincersi che i limiti notevoli non sono sufficienti a risolvere l'indeterminazione. Applichiamo invece il teorema di De l'Hospital.

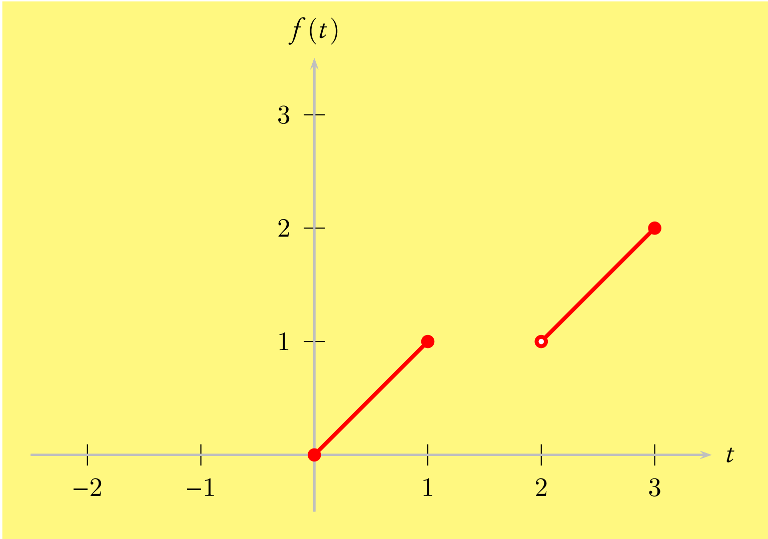
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)+x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x-1)\sin x} = -1$$

grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$. Per il secondo limite, scriviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)} = 2$$

grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$.

Esercizio 4. Per risolvere questo esercizio nulla è tanto di aiuto quanto un grafico della funzione f:



È evidente che la funzione f sia continua nel suo dominio di definizione. Inoltre risulta iniettiva, dunque la funzione inversa esiste e possiamo determinarla esplicitamente:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } 0 \le y < 1 \\ y+1 & \text{se } 1 \le y < 2. \end{cases}$$

Poiché $\lim_{y\to 1-} f^{-1}(y) = 1$ mentre $\lim_{y\to 1+} f^{-1}(y) = 2$, la funzione inversa risulta discontinua nel punto $y = 1$.