# Soluzioni

Simone Secchi

16 ottobre 2015

**Esercizio 1.** Ricordando che
$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
possiamo scrivere
$$\int \frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos^2 x}dx = \int \sqrt{u}-1\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}-u+C = \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}-\tan x + C.$$
Per calcolare l'integrale definito, utilizziamo il Teorema Fondamentale del Calcolo:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos^2 x}dx = \left[\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}-\tan x\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}-1 = -\frac{1}{3}.$$

**Esercizio 2.** Per rispondere è sufficiente ricordare i limiti fondamentali
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$
Infatti,
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\sin(3x^2)-\cos x+e^{x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot 3x^2-1+\frac{1}{2}x^2+1+x^2}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{3x^2}{x} = 0.$$

**Esercizio 3.** Cominciamo a determinare il dominio naturale di definizione: dobbiamo imporre $|x-2|(x-1) \geq 0$, cioè $x \geq 1$. A questo punto conviene sbarazzarsi del segno di valore assoluto:
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(2-x)(x-1)} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{(x-2)(x-1)} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$
Occupiamoci del primo caso. Risulta $f(1) = 0 = f(2)$, ed evidentemente non esistono asintoti. La derivata prima vale
$$f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{(2-x)(x-1)}}, \quad \text{per } 1 \leq x \leq 2.$$
Tale derivata si annulla per $x = 3/2$, e cambia segno attraversando tale punto (da positiva a negativa): dunque $x = 3/2$ è un punto di massimo relativo.

Occupiamoci del secondo caso. Risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x} \left(\sqrt{(x-2)(x-1)} - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)(x-1)-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{2x} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La retta $y = 1 - 3/2$ è pertanto l'asintoto obliquo destro della funzione. La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \quad \text{per } x > 2.$$

Nel nostro *range* il numeratore è positivo al pari del denominatore, dunque la funzione è crescente (strettamente) in $(2, +\infty)$.

Riportiamo un grafico qualitativo nella figura 1.[1]

**Esercizio 4.** Una funzione $f$ è limitata se esiste una costante $C > 0$ tale che $|f(x)| \leq C$ per ogni $x$ appartenente al dominio di definizione di $f$. Una funzione con le proprietà descritte nel testo dell'esercizio non può esistere. Intuitivamente, la spiegazione è questa: se una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha la derivata prima divergente a più infinito, il suo grafico dovrà crescere in modo arbitrariamente veloce.

Più precisamente, applichiamo il teorema del valor medio: per ogni $x$ sufficientemente grande, esiste $c = c_x \in (x, x+1)$ tale che

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-1) = f'(c_x). \tag{1}$$

Ma $\left|f(x+1) - f(x)\right| \leq |f(x+1)| + |f(x)| \leq 2C$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = +\infty$ per ipotesi. Queste due proprietà sono in contraddizione con (1).

[1] Qualcuno noterà che il primo "pezzo" del grafico assomiglia spudoratamente a mezza circonferenza. In effetti, se poniamo $y = \sqrt{(2-x)(x-1)}$ ed eleviamo al quadrato, troviamo $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$, effettivamente equazione di una circonferenza.

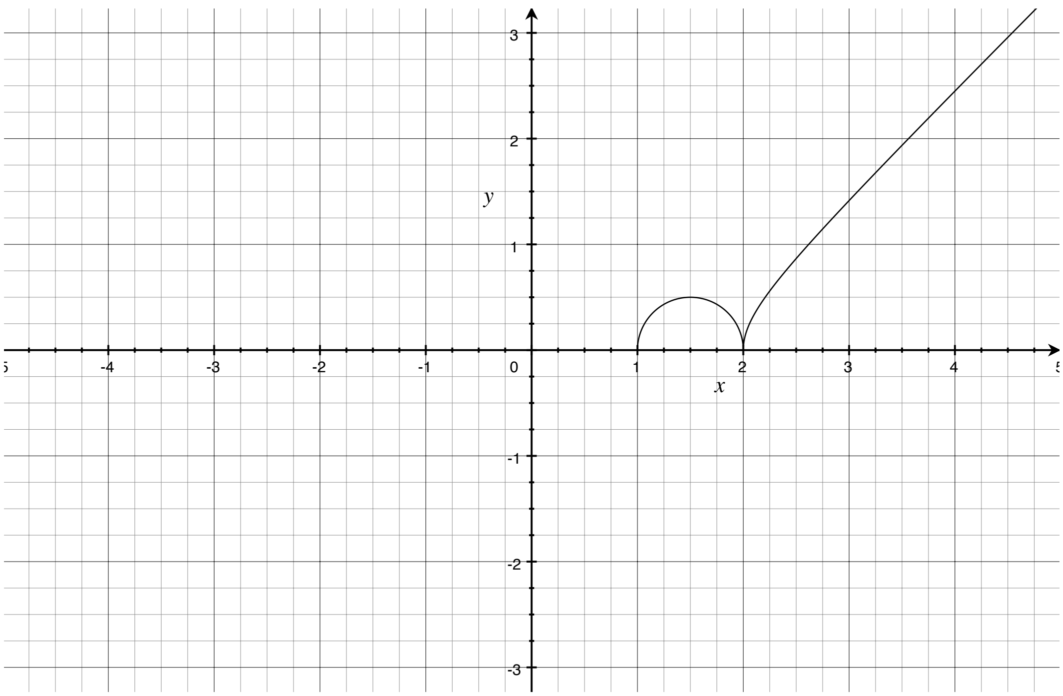


Figura 1: Grafico della funzione $f$, terzo esercizio.