Soluzioni

12 febbraio 2015

Esercizio 1. Innanzitutto $f(0) = \sqrt{1} = 1$. Poiché il polinomio di MacLaurin di ordine 2 è per definizione

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2,$$

ci servono la derivata prima e la derivata seconda della nostra funzione nel punto $x_0 = 0$. Con qualche calcolo,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2},$$

mentre

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Pertanto

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

è il polinomio cercato.

Esercizio 2. Seguendo il suggerimento, fissiamo t e trattiamolo inizialmente come un parametro: poiché alla fine $t \to +\infty$, è legittimo supporre che $t > 1$. Per calcolare

$$\int \frac{dx}{t^2 - x^2},$$

che è l'integrale di una funzione razionale fratta, cerchiamo le radici del polinomio a denominatore: $x = -t$ e $x = t$. Imponendo la scomposizione

$$\frac{1}{t^2 - x^2} = \frac{A}{t - x} + \frac{B}{t + x},$$

determiniamo $A = \frac{1}{2t}$ e $B = \frac{1}{2t}$. Ma allora

$$\int \frac{dx}{t^2 - x^2} = \frac{1}{2t}\left(\int \frac{dx}{t-x} + \int \frac{dx}{t+x}\right) = \frac{1}{2t}\log\left|\frac{t+x}{t-x}\right|.$$

Ricordando che stiamo assumendo $t > 1$, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo e concludere che

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{t^2 - x^2} = \frac{1}{t}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|.$$

Infine, senza alcuna forma indeterminata,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = 0.$$

Esercizio 3. Si tratta di una funzione razionale fratta. Il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali x che non annullano il denominatore, cioè $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Dunque $f : (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$. I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty.$$

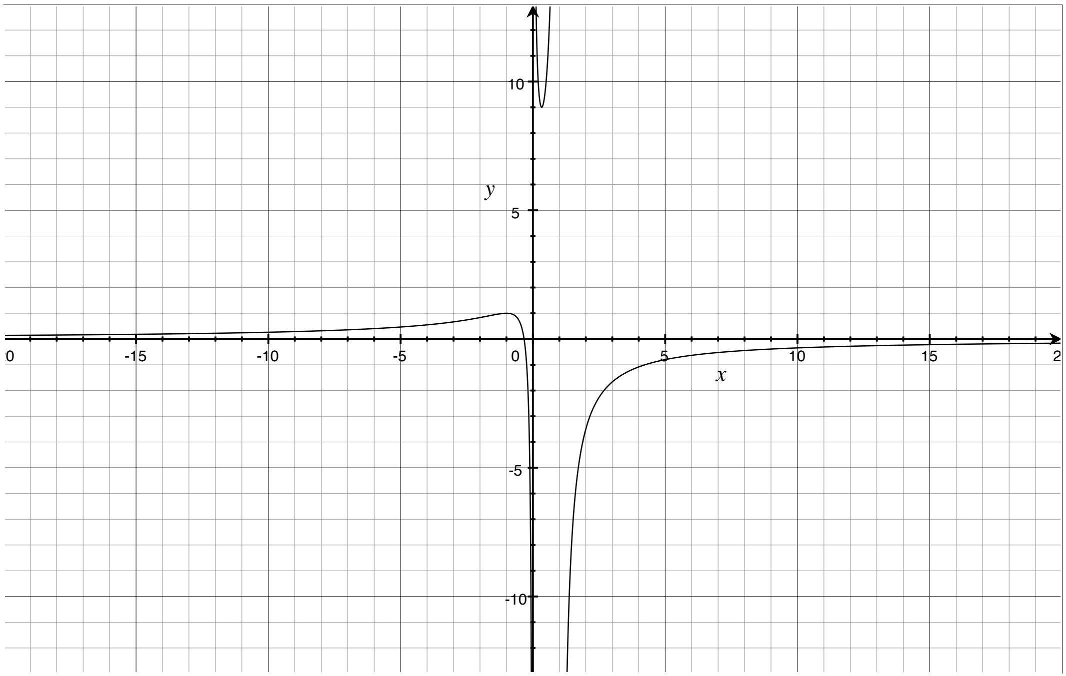

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

La funzione si annulla quando $3x + 1 = 0$, cioè solo per $x = -1/3$. Utilizzando la regola dei segni, possiamo anzi affermare che è positiva per $x < -1/3$ e per $x \in (0, 1)$, negativa per $x \in (-1/3, 0)$ e $x > 1$. In quanto rapporto di polinomi, la funzione è continua e derivabile nel suo dominio di definizione.

La derivata prima vale

$$Df(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2(1 - x)^2}.$$

In particolare, $Df(x) = 0$ solo per $x = -1$ e $x = 1/3$; entrambe le radici sono accettabili. Il denominatore della derivata prima è sempre positivo (nel dominio di definizione), e il numeratore è positivo per valori di x esterni alle due radici. Concludiamo che f cresce per $-\infty < x < -1$, decresce per $-1 < x < 0$ e per $0 < x < 1/3$, cresce per $1/3 < x < 1$ e per $x > 1$. In particolare, $x = -1$ è un punto di massimo relativo e $x = 1/3$ un punto di minimo relativo. Non possono esistere punti di massimo o di minimo assoluti, poiché la funzione è illimitata dal basso e dall'alto.

La derivata seconda vale

$$D^2 f(x) = -\frac{2\left(3x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)}{(x - 1)^3 x^3}.$$

Di questa espressione non sembra ragionevole effettuare uno studio del segno. Tuttavia abbiamo informazioni sufficienti a tracciare un grafico qualitativo della nostra funzione, riportato nella Figura 1.

Esercizio 4. Il ragionamento di Bob è ovviamente scorretto, perché la funzione assegnata *non* si annulla per $x = \pm\pi/2$ (si veda il grafico riportato in figura)!

Tuttavia possiamo applicare il medesimo teorema nell'intervallo $[0, \pi]$, e dedurre l'esistenza di un punto critico. Per inciso, applicando ancora il teorema di Rolle nell'intervallo $[\pi, 0]$, o più semplicemente osservando che la funzione è pari, possiamo concludere che esistono *due* punti critici compresi fra $-\pi$ e π.

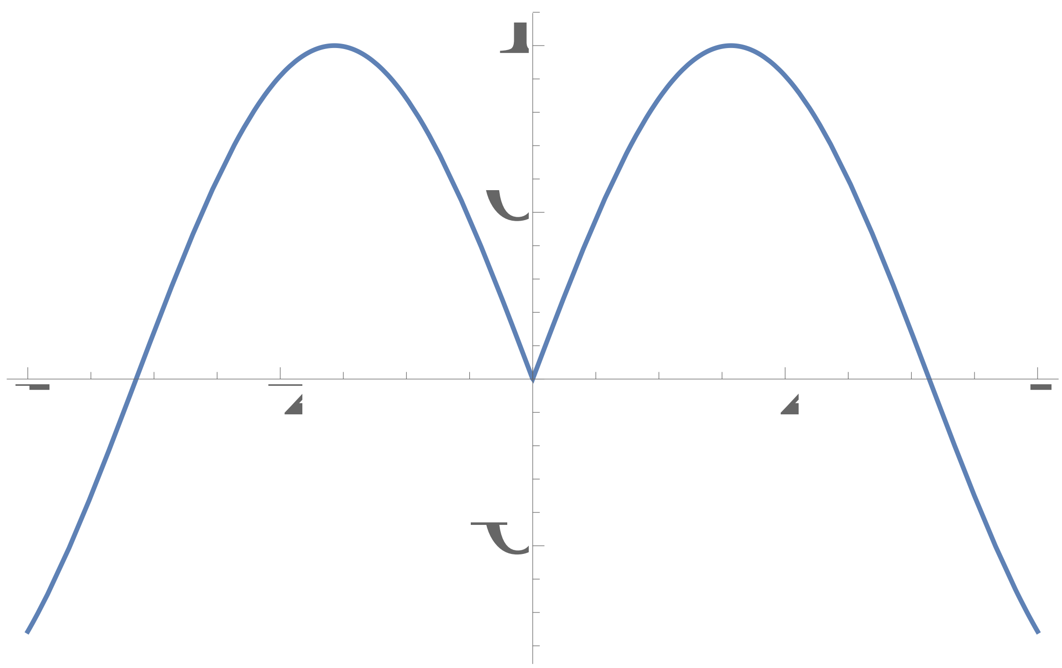

Figura 2: Grafico della funzione f, quarto esercizio.

Soluzioni

12 febbraio 2015

Esercizio 1. Innanzitutto $f(0) = \sqrt{1} = 1$. Poiché il polinomio di MacLaurin di ordine 2 è per definizione

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2,$$

ci servono la derivata prima e la derivata seconda della nostra funzione nel punto $x_0 = 0$. Con qualche calcolo,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \quad f'(0) = -\frac{1}{2},$$

mentre

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Pertanto

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

è il polinomio cercato.

Esercizio 2. Seguendo il suggerimento, fissiamo t e trattiamolo inizialmente come un parametro: poiché alla fine $t \to +\infty$, è legittimo supporre che $t > 1$. Per calcolare

$$\int \frac{dx}{x^2 - t^2},$$

che è l'integrale di una funzione razionale fratta, cerchiamo le radici del polinomio a denominatore: $x = -t$ e $x = t$. Imponendo la scomposizione

$$\frac{1}{x^2 - t^2} = \frac{A}{x-t} + \frac{B}{x+t},$$

determiniamo $A = \frac{1}{2t}$ e $B = -\frac{1}{2t}$. Ma allora

$$\int \frac{dx}{x^2 - t^2} = \frac{1}{2t}\left(\int \frac{dx}{x-t} - \int \frac{dx}{x+t}\right) = \frac{1}{2t}\log\left|\frac{x-t}{x+t}\right|.$$

Ricordando che stiamo assumendo $t > 1$, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo e concludere che

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - t^2} = \frac{1}{t}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|.$$

Infine, senza alcuna forma indeterminata,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = 0.$$

Esercizio 3. Si tratta di una funzione razionale fratta. Il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali x che non annullano il denominatore, cioè $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Dunque $f \colon (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$. I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty.$$

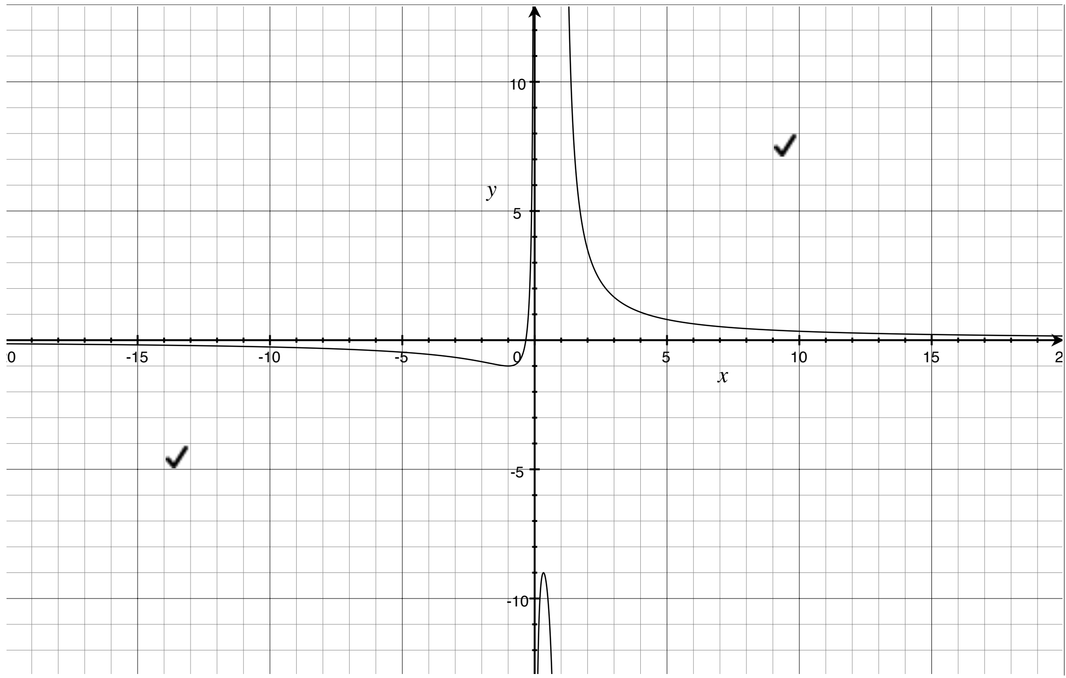

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

La funzione si annulla quando $3x + 1 = 0$, cioè solo per $x = -1/3$. Utilizzando la regola dei segni, possiamo anzi affermare che è negativa per $x < -1/3$ e per $x \in (0, 1)$, positiva per $x \in (-1/3, 0)$ e $x > 1$. In quanto rapporto di polinomi, la funzione è continua e derivabile nel suo dominio di definizione.

La derivata prima vale

$$Df(x) = -\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2(1-x)^2}.$$

In particolare, $Df(x) = 0$ solo per $x = -1$ e $x = 1/3$; entrambe le radici sono accettabili. Il denominatore della derivata prima è sempre positivo (nel dominio di definizione), e il numeratore è positivo per valori di x esterni alle due radici. Concludiamo che f decresce per $-\infty < x < -1$, cresce per $-1 < x < 0$ e per $0 < x < 1/3$, decresce per $1/3 < x < 1$ e per $x > 1$. In particolare, $x = -1$ è un punto di minimo relativo e $x = 1/3$ un punto di massimo relativo. Non possono esistere punti di massimo o di minimo assoluti, poiché la funzione è illimitata dal basso e dall'alto.

La derivata seconda vale

$$D^2 f(x) = \frac{2\left(3x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)}{(x-1)^3 x^3}.$$

Di questa espressione non sembra ragionevole effettuare uno studio del segno. Tuttavia abbiamo informazioni sufficienti a tracciare un grafico qualitativo della nostra funzione, riportato nella Figura 1.

Esercizio 4. Il ragionamento di Bob è ovviamente scorretto, perché la funzione assegnata *non* si annulla per $x = \pm\pi/2$ (si veda il grafico riportato in figura)!

Tuttavia possiamo applicare il medesimo teorema nell'intervallo $[0, \pi]$, e dedurre l'esistenza di un punto critico. Per inciso, applicando ancora il teorema di Rolle nell'intervallo $[\pi, 0]$, o più semplicemente osservando che la funzione è pari, possiamo concludere che esistono *due* punti critici compresi fra $-\pi$ e π.

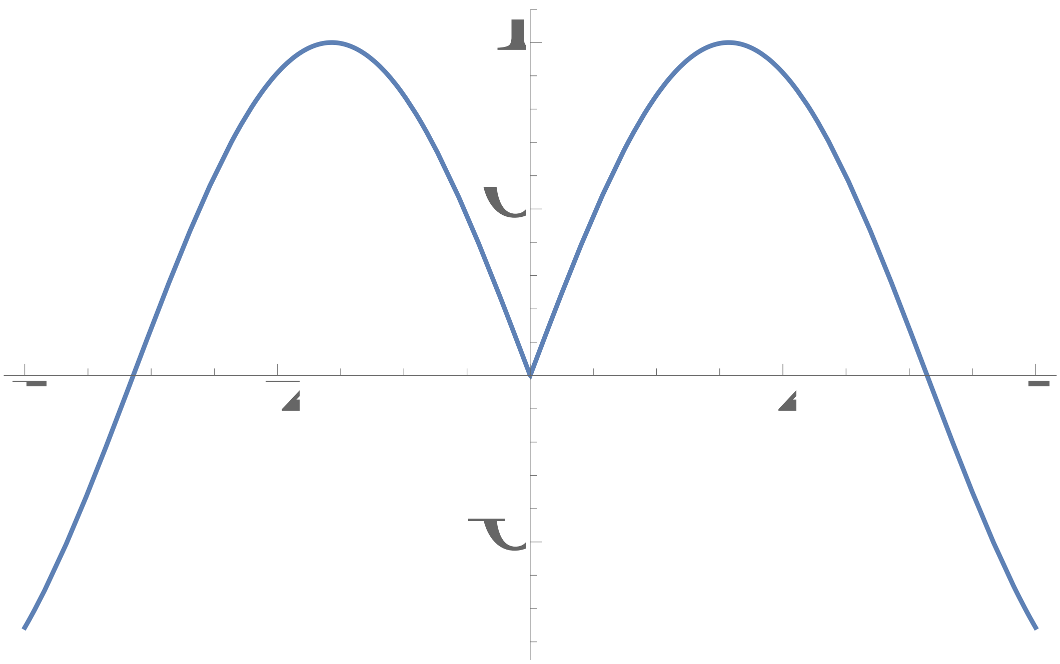

Figura 2: Grafico della funzione f, quarto esercizio.