Soluzioni

Simone Secchi

9 Luglio 2015

Esercizio 1. La funzione assegnata può essere evidentemente limitata all'intervallo $[0, 2\pi]$ ed estesa per periodicità al termine dello studio. In tale intervallo, il denominatore si annulla per $x = 0$ e per $x = 2\pi$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2\pi-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\infty.$$

Anche il segno è complessivamente elementare: il denominatore è ovunque positivo, mentre il numeratore è positivo fra 0 e π, negativo fra π e 2π: quindi $f(x) > 0$ per $0 < x < \pi$, e $f(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$. Abbiamo già individuato tutti i possibili asintoti, che sono solo verticali: $x = 0$ e $x = 2\pi$.

La funzione è continua nel suo dominio $(0, 2\pi)$, ed anche derivabile in quanto quoziente di funzioni derivabili. La derivata prima vale

$$Df(x) = \frac{1}{\cos x - 1} \quad \text{per } 0 < x < 2\pi.$$

Da quanto detto sopra, la derivata prima è ovunque negativa. Non esistono punti critici, quindi non esistono punti di massimo o di minimo locali. La derivata seconda vale

$$D^2 f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x - 1)^2} \quad \text{per } 0 < x < 2\pi.$$

In particolare deduciamo che la nostra funzione è convessa per $0 < x < \pi$, possiede un flesso a tangente obliqua in $x = \pi$, e diventa concava nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$. Riportiamo un grafico qualitativo nella figura 1.

Esercizio 2. Per calcolare l'integrale indefinito proposto, conviene osservare che $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Con il cambiamento di variabile $x - 2 = u$ ci riconduciamo all'integrale

$$\int \frac{u + 4}{u^2} \, du = \int \frac{du}{u} + 4 \int \frac{du}{u^2} = \log |u| - \frac{4}{u} + C.$$

Pertanto

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 4} \, dx = \log |x - 2| - \frac{4}{x - 2} + C.$$

Esercizio 3. Il primo limite si risolve direttamente, osservando che

$$3^{x^2} - (3^x)^2 = 3^{x^2} - 3^{2x} = 3^{2x} \left(3^{x^2 - 2x} - 1 \right).$$

Quando $x \to +\infty$, abbiamo il prodotto $(+\infty)(+\infty)$, dunque il limite vale $+\infty$. Il secondo limite è un po' più impegnativo e possiamo risolverlo mediante il teorema di De l'Hospital applicato in cascata:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 + e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}.$$

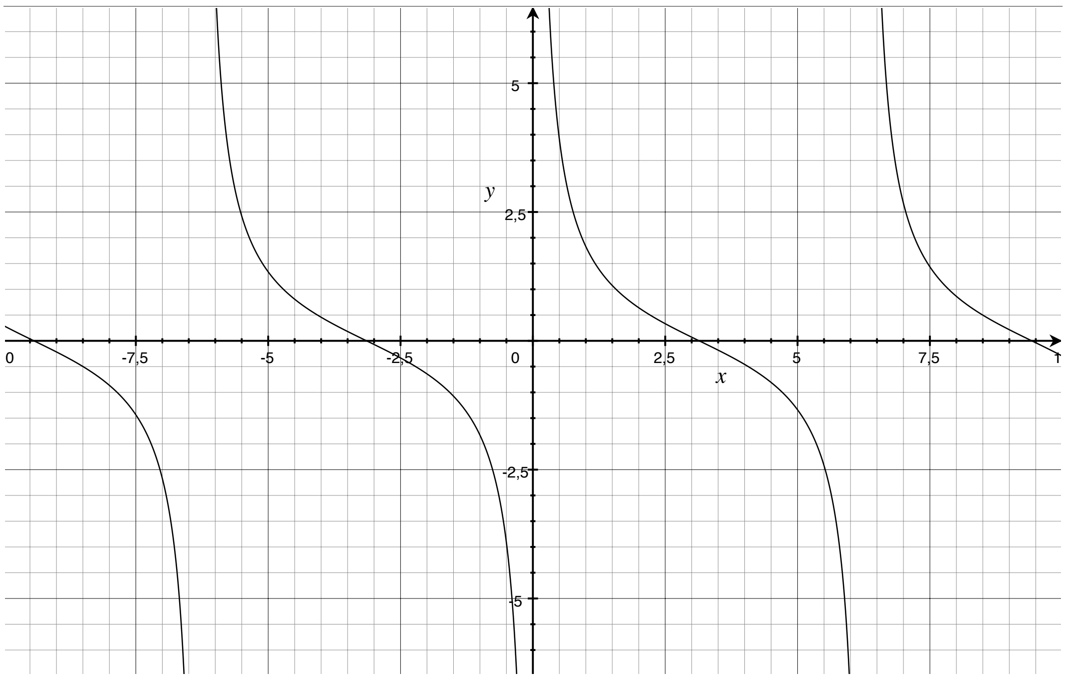

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Esercizio 4. Iniziamo a calcolare $f(1) = 2(\sqrt{1}-1) = 0$. Per la continuità imponiamo che $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 0$. Ora, $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 2(\sqrt{x}-1) = 0$, mentre $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \log(x+k) = \log(1+k)$.

La condizione di continuità si riduce pertanto a $\log(1+k) = 0$, cioè $k = 0$. Inserendo tale valore nell'espressione di f arriviamo a

$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{per } x > 1 \\ 2(\sqrt{x}-1) & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

Derivando $\log x$ per $x = 1$ e $2(\sqrt{x}-1)$ per $x = 1$ ci accorgiamo che otteniamo lo stesso valore. Dunque la funzione in corrispondenza del valore $k = 0$ è continua e derivabile.