Soluzioni

9 aprile 2015

Esercizio 1. Il limite è una forma indeterminata $[\infty - \infty]$. Possiamo riscrivere il limite:

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \to 0+} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)\sin^2 x}$$

Usando l'identità fondamentale $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e sostituendo $t = \cos x$, troviamo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)\sin^2 x} = \lim_{t \to 1-} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3 - t^2 - t + 1} = \lim_{t \to 1-} \frac{(t-1)^2}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ovviamente allo stesso risultato si perviene applicando il teorema di De l'Hospital: lo scopo della risoluzione precedente è solo quello di mostrare che a volte si perviene al risultato utilizzando tecniche più elementari.

Esercizio 2. L'integrale proposto è improprio. Infatti

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x-2)^2},$$

che si annulla per $x = 2$ all'interno dell'intervallo $[0, 5]$ di integrazione. Poiché

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + C,$$

ci basta calcolare

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{b \to 2-} \int_0^b \frac{dx}{(x-2)^2} + \lim_{b \to 2+} \int_b^5 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Poiché

$$\lim_{b \to 2-} \int_0^b \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{b \to 2-} \left[-\frac{1}{x-2} \right]_{x=0}^{x=b} = \lim_{b \to 2-} -\frac{1}{2} - \frac{1}{b-2} = +\infty,$$

è inutile proseguire: l'integrale improprio diverge.

Esercizio 3. La funzione può essere riscritta utilizzando le note[1] regole delle potenze:

$$f(x) = 18\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{18(1+x)}{x^2}.$$

Il dominio di definizione è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 0-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 0+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi la funzione possiede l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ e l'asintoto verticale di equazione $x = 0$. È inoltre immediato lo studio del segno della funzione: essa è positiva per $1 + x > 0$, cioè per $x > -1$. La funzione interseca l'asse delle ascisse per $x = -1$.

[1] Speriamo che siano davvero note!

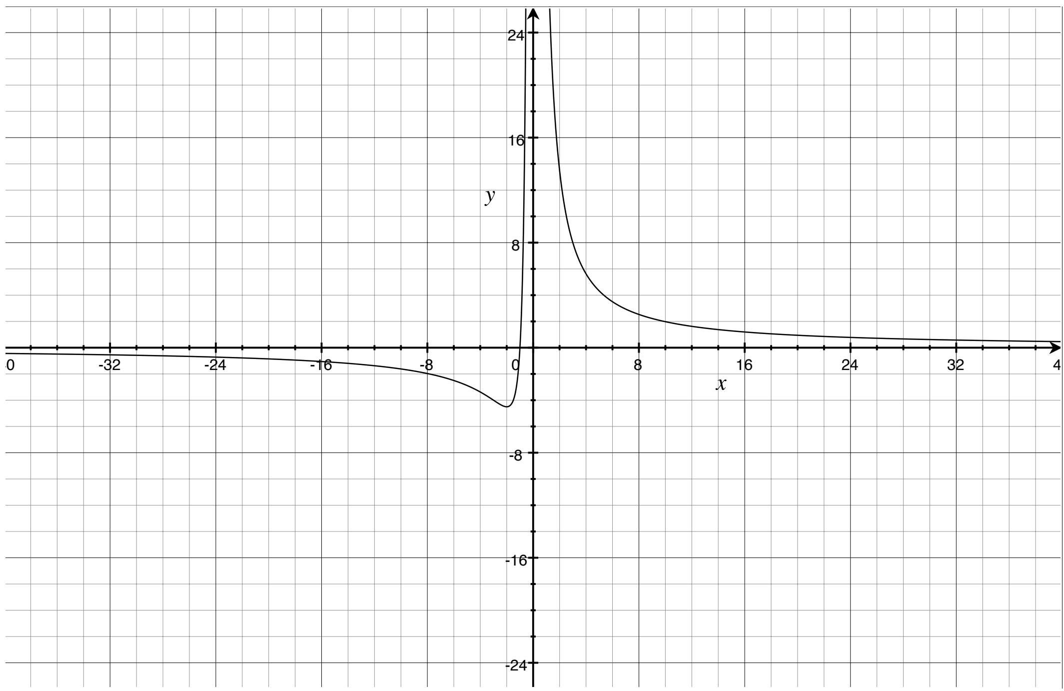

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Calcoliamo la derivata prima:

$$Df(x) = -\frac{18(2+x)}{x^3}.$$

Utilizzando la regola dei segni, vediamo che la funzione decresce per $x < -2$ e per $x > 0$, mentre cresce per $-2 < x < 0$. In particolare il punto $(-2, -9/2)$ è un minimo assoluto.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$D^2 f(x) = \frac{36(3+x)}{x^4}.$$

È immediato verificare che la funzione è concava per $x < -3$ e convessa per $-3 < x < 0$ e $x > 0$. In particolare il punto $(-3, -4)$ è un punto di flesso a tangente obliqua.

Abbiamo tutti gli ingredienti per tracciare un grafico qualitativo dell'andamento della nostra funzione, riportato in Figura 1.

Esercizio 4. Per ipotesi,

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = f(4) = \lim_{x \to 4+} f(x).$$

Quindi

$$8c = 4 + a = 10,$$

e pertanto $a = 6$, $c = 5/4$.