Soluzioni

8 gennaio 2015

Esercizio 1. Osservando che
$$e^{x^2}-\cos x = e^{x^2}-1+1-\cos x,$$
possiamo dire che
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x\tan x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sin x\tan x}+\frac{1-\cos x}{\sin x\tan x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin x\tan x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin x\tan x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cos x+\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cos x\right)\\ &= 1\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Un'osservazione: cercando di applicare il teorema di De l'Hospital senza alcuna semplificazione preventiva, la forma indeterminata *non* si scioglie.

Esercizio 2. Poiché la continuità è necessaria alla derivabilità, per prima cosa domandiamoci se la funzione risulti continua in tutti i punti del dominio di definizione. Ora, per ispezione diretta si capisce che dobbiamo solamente analizzare la continuità nei punti di "giunzione", cioè $x=0$. La teoria insegna che la funzione f è continua nel punto $x=0$ se e solo se
$$\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x).$$
Ora, $f(0)=3$, mentre
$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(a-1)x+b-a=b-a.$$
Invece
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}cx-x^2-3b=-3b.$$
Ricapitolando, il vincolo di continuità nel punto $x=0$ è
$$\begin{cases} b-a=3\\ -3b=3.\end{cases}$$
Risolvendo il sistema, troviamo
$$b=-1,\quad a=b-3=-4. \tag{1}$$
Dunque possiamo proseguire l'analisi della derivabilità assumendo $a=-4$ e $b=-1$. Calcoliamo le derivate destra e sinistra di f nel punto $x=0$. Poiché
$$\frac{d}{dx}\left\{(a-1)x+b-a\right\}=a-1$$
$$\frac{d}{dx}\left\{cx-x^2-3b\right\}=c-2x,$$
risulta, ricordando (1),
$$D_-f(0)=c,\quad D_+f(0)=a-1=-5.$$
Deduciamo che la derivata destra coincide con la derivata sinistra se e solo se $c=-5$. La soluzione dell'esercizio è dunque la terna $a=-4$, $b=-1$, $c=-5$.

Esercizio 3. Osservando che il denominatore

$$1 + \frac{|x|}{2} \geq 1,$$

deduciamo che la funzione è definita sull'intero asse reale $\mathbb{R}$. I limiti all'infinito valgono

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Osservando che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}} = 0,$$

possiamo concludere immediatamente che la retta $y = x - 1$ è l'unico asintoto della nostra funzione.

Occupiamoci subito delle eventuali patologie causate dal segno di valore assoluto. In quanto composizione di funzioni continue, f risulta senz'altro essere continua in tutto il dominio di definizione. Al contrario, la derivabilità nel punto $x = 0$ deve essere analizzata accuratamente, poiché il valore assoluto $|x|$ non è ivi derivabile. Togliamo, usando la definizione, il segno di valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{2}{1 - \frac{x}{2}} & \text{se } x < 0 \\ x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{x}{2}} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{d}{dx}\left(x - 1 + \frac{2}{1 - \frac{x}{2}}\right) = 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{x}{2}}\right) = \frac{x(4+x)}{(x+2)^2},$$

vediamo che

$$D_- f(0) = \lim_{x \to 0-} 1 + \frac{4}{(x-2)^2} = 2,$$

mentre

$$D_+ f(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{x(4+x)}{(x+2)^2} = 0.$$

Il punto $(0, 1)$ è pertanto un punto angoloso. Facendo poi qualche calcolo algebrico, si potrebbe dimostrare che $f(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$.

Avendo già calcolato la derivata prima, analizziamo la monotonia. Per $x < 0$, la derivata vale

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{(x-2)^2} > 1,$$

e in particolare la funzione è strettamente crescente. Per $x > 0$, la derivata vale

$$f'(x) = \frac{x(4+x)}{(x+2)^2} > 0,$$

e ancora la funzione risulta strettamente crescente. In virtù della continuità in $x = 0$ possiamo concludere che f è una funzione monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Infine, il calcolo della derivata seconda è fattibile:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Naturalmente non ha senso calcolare la derivata seconda nell'origine, poiché sappiamo già che non può esistere (perché?). La funzione f risulta essere convessa sia in $(-\infty, 0)$ che in $(0, +\infty)$. *Attenzione: la funzione non è convessa in* $\mathbb{R}$*!*

Il grafico qualitativo è riportato nella Figura 1.

Esercizio 4. La sostituzione $u = \log x$, $du = \frac{dx}{x}$, trasforma l'integrale in

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 u \cos u \, du = \left[\frac{\sin^3 u}{3}\right]_{u=\pi/4}^{u=\pi/2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{12}.$$

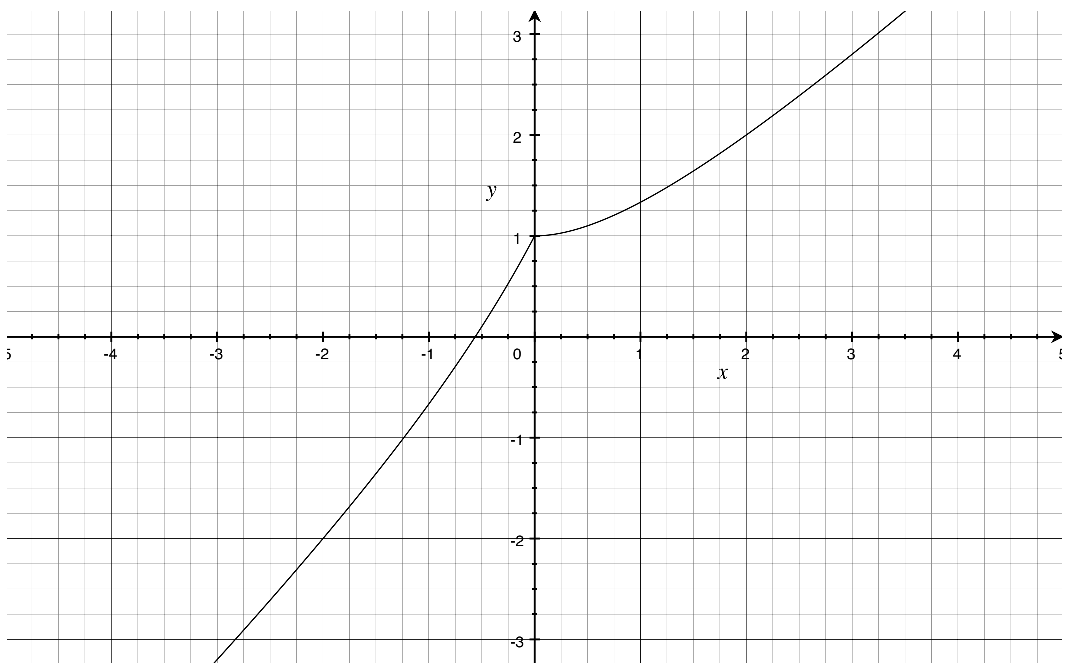

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Soluzioni

8 gennaio 2015

Esercizio 1. Osservando che
$$e^{x^2} - \cos x = e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x,$$
possiamo dire che
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin x \tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x \tan x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x \tan x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{x^2}{\sin x \tan x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{x^2}{\sin x \tan x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cos x + \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cos x \right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$
Un'osservazione: cercando di applicare il teorema di De l'Hospital senza alcuna semplificazione preventiva, la forma indeterminata *non* si scioglie.

Esercizio 2. Poiché la continuità è necessaria alla derivabilità, per prima cosa domandiamoci se la funzione risulti continua in tutti i punti del dominio di definizione. Ora, per ispezione diretta si capisce che dobbiamo solamente analizzare la continuità nei punti di "giunzione", cioè $x = 0$. La teoria insegna che la funzione f è continua nel punto $x = 0$ se e solo se
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x).$$
Ora, $f(0) = 3$, mentre
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (b-1)x + a - b = a - b.$$
Invece
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} cx - x^2 - 3a = -3a.$$
Ricapitolando, il vincolo di continuità nel punto $x = 0$ è
$$\begin{cases} a - b = 3 \\ -3a = 3. \end{cases}$$
Risolvendo il sistema, troviamo
$$a = -1, \quad b = a - 3 = -4. \tag{1}$$
Dunque possiamo proseguire l'analisi della derivabilità assumendo $a = -1$ e $b = -4$. Calcoliamo le derivate destra e sinistra di f nel punto $x = 0$. Poiché
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left\{ (b-1)x + a - b \right\} &= b - 1 \\
\frac{d}{dx} \left\{ cx - x^2 - 3a \right\} &= c - 2x,
\end{aligned}$$
risulta, ricordando (1),
$$D_- f(0) = c, \quad D_+ f(0) = b - 1 = -5.$$
Deduciamo che la derivata destra coincide con la derivata sinistra se e solo se $c = -5$. La soluzione dell'esercizio è dunque la terna $a = -1$, $b = -4$, $c = -5$.

Esercizio 3. Osservando che il denominatore

$$1 + \frac{|x|}{2} \geq 1,$$

deduciamo che la funzione è definita sull'intero asse reale $\mathbb{R}$. I limiti all'infinito valgono

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Osservando che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}} = 0,$$

possiamo concludere immediatamente che la retta $y = x - 1$ è l'unico asintoto della nostra funzione.

Occupiamoci subito delle eventuali patologie causate dal segno di valore assoluto. In quanto composizione di funzioni continue, f risulta senz'altro essere continua in tutto il dominio di definizione. Al contrario, la derivabilità nel punto $x = 0$ deve essere analizzata accuratamente, poiché il valore assoluto $|x|$ non è ivi derivabile. Togliamo, usando la definizione, il segno di valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 - \frac{2}{1 - \frac{x}{2}} & \text{se } x < 0 \\ x - 1 - \frac{2}{1 + \frac{x}{2}} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{d}{dx}\left(x - 1 - \frac{2}{1 - \frac{x}{2}}\right) = \frac{(x-4)x}{(x-2)^2}$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(x - 1 - \frac{2}{1 + \frac{x}{2}}\right) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2},$$

vediamo che

$$D_- f(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{(x-4)x}{(x-2)^2} = 0,$$

mentre

$$D_+ f(0) = \lim_{x \to 0+} 1 + \frac{4}{(x+2)^2} = 2.$$

Il punto $(0, 1)$ è pertanto un punto angoloso. Facendo poi qualche calcolo algebrico, si potrebbe dimostrare che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2$.

Avendo già calcolato la derivata prima, analizziamo la monotonia. Per $x < 0$, la derivata vale

$$f'(x) = \frac{(x-4)x}{(x-2)^2} > 0,$$

e in particolare la funzione è strettamente crescente. Per $x > 0$, la derivata vale

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2} > 1,$$

e ancora la funzione risulta strettamente crescente. In virtù della continuità in $x = 0$ possiamo concludere che f è una funzione monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Infine, il calcolo della derivata seconda è fattibile:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3} & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Naturalmente non ha senso calcolare la derivata seconda nell'origine, poiché sappiamo già che non può esistere (perché?). La funzione f risulta essere concava sia in $(-\infty, 0)$ che in $(0, +\infty)$. *Attenzione: la funzione non è concava in* $\mathbb{R}$*!*

Il grafico qualitativo è riportato nella Figura 1.

Esercizio 4. La sostituzione $u = \log x$, $du = \frac{dx}{x}$, trasforma l'integrale in

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 u \sin u \, du = \left[-\frac{\cos^3 u}{3}\right]_{u=\pi/4}^{u=\pi/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

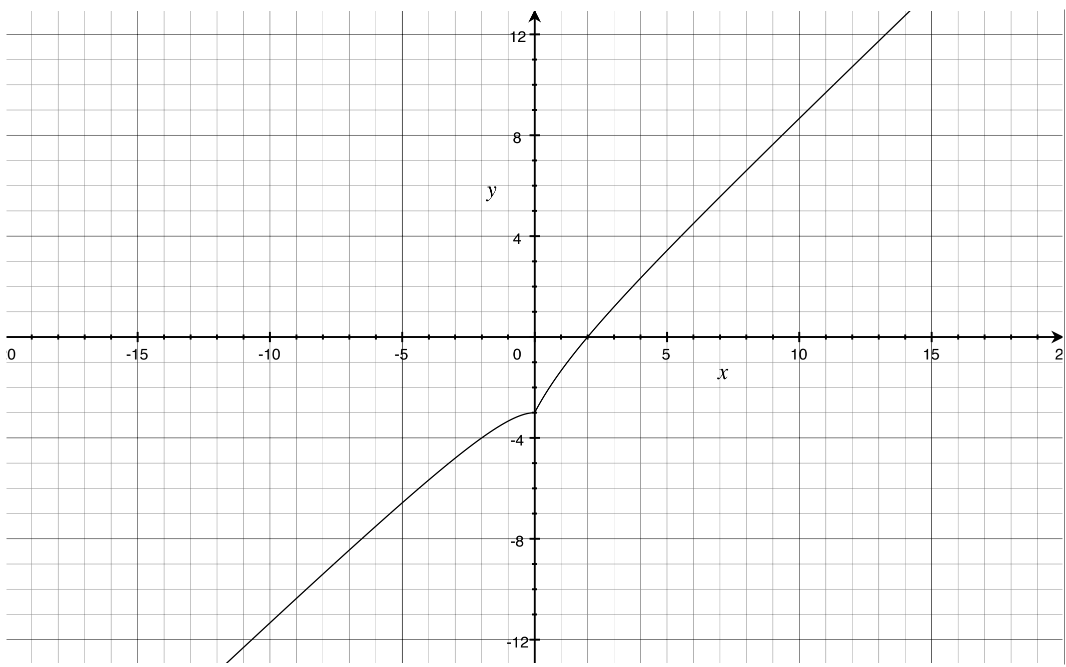

Figura 1: Grafico della funzione f, terzo esercizio.