Soluzioni

Simone Secchi

4 Giugno 2015

Esercizio 1. La funzione
$$f(x)=\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$
è definita per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ tali che $1-x \geq 0$ e $1-x \neq 0$. Dunque il dominio è la semiretta $(-\infty,0)$. Agli estremi del dominio valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 1-} f(x)=+\infty.$$

Essendo la somma di due radicali,[1] la funzione è ovunque non negativa. La retta $x=1$ è l'unico asintoto verticale. Non esistono asintoti orizzontali, mentre potrebbero esserci asintoti obliqui. Per appurarlo, dobbiamo calcolare
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x\sqrt{1-x}}=0.$$
Poiché il risultato è nullo, non esiste asintoto obliquo.

Calcoliamo la derivata prima: dopo qualche semplificazione algebrica, troviamo

$$Df(x)=\frac{x}{2(1-x)^{3/2}}.$$

Essendo il denominatore ovunque positivo nel dominio di definizione, vediamo che il segno della derivata cambia in $x=0$, passando da negativo a positivo. Dunque la funzione decresce per $-\infty<x<0$ e cresce per $0<x<1$, presentando in $x=0$ un punto di minimo. Tale minimo è anche assoluto.

Calcoliamo la derivata seconda:
$$D^2f(x)=\frac{2+x}{4(1-x)^{5/2}}.$$
Nel punto $x=-2$ la derivata seconda cambia segno, e pertanto siamo in presenza di un punto di flesso a tangente obliqua. La funzione è concava per $-\infty<x<-2$ e convessa per $-2<x<1$.

Possiamo tracciare un grafico qualitativo, che appare in Figura 1.

Esercizio 2. Per calcolare l'integrale, evitiamo di effettuare la sostituzione — che pure sarebbe intuitiva — $(x+1)(x-1)=z$ e procediamo direttamente per parti. Osservando che

$$\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{1}{1+x^2},$$

scriviamo

$$\int \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = x\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\int\frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C.$$

[1]Ricordiamo che in Analisi Matematica le radici quadrate restituiscono *sempre* valori maggiori o uguali a zero.

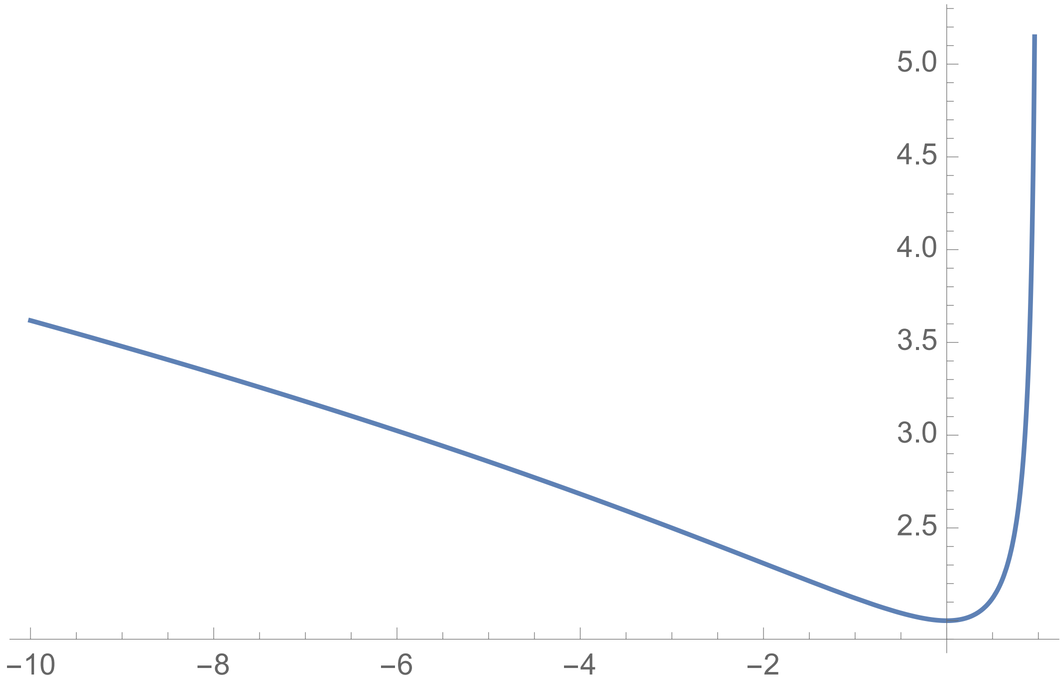

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Esercizio 3. Procediamo mediante una razionalizzazione e un limite notevole:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Essendo costruita per "incollamento" di due funzioni continue, possiamo limitarci ad analizzare la continuità nel punto di giunzione, cioè $x=0$. I limiti per difetto e per eccesso in tale punto valgono rispettivamente

$$\lim_{x\to 0-} a(x+1) = a = f(0), \quad \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{\sin(3x)} = \frac{1}{3}.$$

Quindi la condizione necessaria e sufficiente affinché f risulti continua in $x=0$ è che $a=1/3$.