Soluzioni

18 febbraio 2014

Esercizio 1. Poiché le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, ci limitiamo a studiare la funzione nel primo intervallo di periodicità $[0, 2\pi]$. In tale intervallo, il denominatore si annulla per $x = 0$ e $x = 2\pi$, e dunque il dominio di definizione è l'intervallo *aperto* $(0, 2\pi)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{1-\cos x}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1-\cos x}\frac{\sin x}{x} = +\infty.$$

Con calcoli simili, $\lim_{x\to 2\pi-} f(x) = -\infty$. Quindi le rette $x = 0$ e $x = 2\pi$ sono asintoti verticali. Per questioni di periodicità non possono esistere asintoti orizzontali o obliqui.

Ricordando che $\cos x \leq 1$ per ogni x, troviamo immediatamente che il segno di f è il segno del numeratore, cioè positivo in $(0, \pi/2)$ e negativo in $(\pi/2, 2\pi)$.

La derivata prima vale

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\cos x\,(1-\cos x) - \sin x \sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = -\frac{1}{1-\cos x}.\end{aligned}$$

Come osservato sopra, $1 - \cos x > 0$ sempre, dunque la funzione è sempre monotona decrescente (in senso stretto). La derivata seconda vale

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2} &= -\frac{d}{dx}\frac{1}{1-\cos x} = -\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}.\end{aligned}$$

Questa espressione cambia segno per $x = \pi$, e dunque il punto $(\pi, 0)$ è un punto di flesso per il grafico della funzione.

Il grafico della funzione è riportato nella Figura 1, tenuto conto della periodicità.

Esercizio 2. Basta applicare la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned}\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right)(1-q) &= 1+q+q^2+\ldots+q^n - q\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) \\ &= 1+q+q^2+\ldots+q^n - q - q^2 - q^3 - \ldots - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1},\end{aligned}$$

poiché tutte le potenze si elidono tranne 1 e q^{n+1}.

Ma allora

$$\lim_{n\to+\infty} 1+q+q^2+\ldots+q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Se $0 < q < 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$, e dunque il limite vale $\frac{1}{1-q}$. Se $q > 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$, e il limite vale $+\infty$. Se, infine, $q = 1$, allora $1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^{n+1} = n + 1$, e il limite vale ancora $+\infty$.

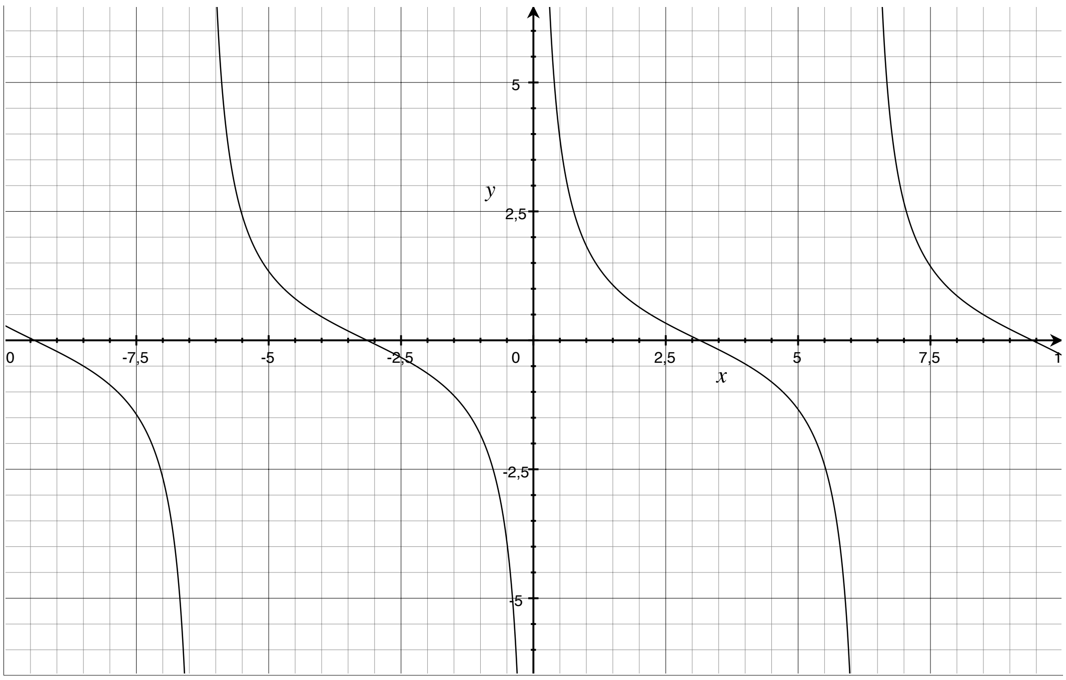

Figura 1: Grafico della funzione f, secondo esercizio.

Esercizio 3. L'unica difficoltà è il valore assoluto. Nell'intervallo $[0,\pi]$,

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{se } 0 \le x \le \pi/2 \\ -\cos x & \text{se } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Quindi possiamo scomporre

$$\int_0^\pi 12(\sin x)^{12}|\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} 12(\sin x)^{12}\cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} 12(\sin x)^{12}\cos x\,dx.$$

Procuriamoci una primitiva: ponendo $t=\sin x$, $dt = \cos x\,dx$,

$$\int 12(\sin x)^{12}\cos x\,dx = \int 12t^{12}\,dt = \frac{12}{13}t^{13}+C = \frac{12}{13}(\sin x)^{13}+C.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 12(\sin x)^{12}|\cos x|\,dx &= \int_0^{\pi/2} 12(\sin x)^{12}\cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} 12(\sin x)^{12}\cos x\,dx \\ &= \left[\frac{12}{13}(\sin x)^{13}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{12}{13}(\sin x)^{13}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{12}{13}+\frac{12}{13} = \frac{24}{13}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Nel primo limite possiamo trascurare l'addendo 1 nel logaritmo, poiché l'altro addendo $6e^x$ è divergente. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(6e^x+1)}{x+\log(6e^x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log 6 + x}{x+\log 6 + x} = \frac{1}{2}$$

per confronto di infiniti. È stata usata la formula $\log(6e^x) = \log 6 + \log e^x = \log 6 + x$ che discende dal fatto che esponenziale e logaritmo sono funzioni l'una inversa dell'altra.

Nel secondo limite può essere utile porre $u = x - 7$, in modo che $u \to 0$. Il limite diventa

$$\lim_{u \to 0} \frac{(u+1)e^u - 1}{(u+7)\log(1+u)} = \lim_{u \to 0} \frac{(1+u)^2 - 1}{(u+7)u} = \lim_{u \to 0} \frac{u^2 + 2u}{u^2 + 7u} = \frac{2}{7},$$

avendo usato i limiti notevoli $\log(1+u) \sim u$ e $e^u \sim 1 + u$.