Soluzioni

14 gennaio 2014

Esercizio 1. Affinché la funzione sia ben definita, occorre che la quantità sotto la radice quadrata sia non negativa, cioè $1-x^2 \geq 0$. Quindi $-1 \leq x \leq 1$, e il dominio è l'intervallo $[-1,1]$. Questo impedisce evidentemente l'esistenza di asintoti orizzontali o obliqui. Poiché la formula definisce una funzione continua, non possono esserci nemmeno asintoti verticali.

Agli estremi, $f(-1)=0=f(1)$. Può essere utile osservare che

$$f(-x)=(-x)\sqrt{1-x^2}=-f(x),$$

sicché la funzione è dispari. Ci limitiamo dunque a studiarne l'andamento per $x \geq 0$. Il segno della funzione diventa immediato: poiché $x \in [0,1]$, $x\sqrt{1-x^2}$ è il prodotto di quantità non negative, e dunque $f(x) \geq 0$ per $x \in [0,1]$ (e $f(x) \leq 0$ per $x \in [-1,0]$, per disparità).

Veniamo al calcolo della derivata prima: per $x \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \sqrt{1-x^2}+x\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Evidentemente l'ultima espressione diverge a $-\infty$ per $x \to 1^-$, e quindi non esiste la derivata sinistra in $x=1$. Poiché la derivata di una funzione dispari è una funzione pari,[1] questa formula si estende anche a $x \in (-1,0]$. La formula (1) dice che f cresce dove $1-2x^2 \geq 0$, cioè per $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Deduciamo che il punto $(-\frac{\sqrt{2}}{2},1/2)$ è un minimo assoluto, mentre $(\frac{\sqrt{2}}{2},1/2)$ è un massimo assoluto.

Con calcoli abbastanza semplici, troviamo che

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Il denominatore della derivata seconda è sempre positivo, mentre la disequazione $x(2x^2-3) \geq 0$ si spezza in $x \geq 0$ oppure $2x^2-3 \geq 0$. Ma i valori $\pm\sqrt{3/2}$ sono esterni al dominio di definizione di f, quindi il fattore $2x^2-3$ è sempre negativo in $[-1,1]$. Concludiamo che f è convessa in $[-1,0]$ e concava in $[0,1]$.

Il grafico della funzione è riportato nella Figura 1.

Esercizio 2. L'integrale è quello di una funzione razionale fratta del secondo ordine. Dalla teoria sappiamo che bisogna calcolare il discriminante Δ del polinomio a denominatore:

$$\Delta = 6^2-4\times 13=-16<0.$$

La teoria generale ci insegna che, quando il discriminante è negativo, bisogna riscrivere il polinomio isolando un quadrato perfetto:

$$x^2-6x+13=(x-3)^2-9+13=(x-3)^2+4.$$

[1] È un esercizio molto semplice ma istruttivo.

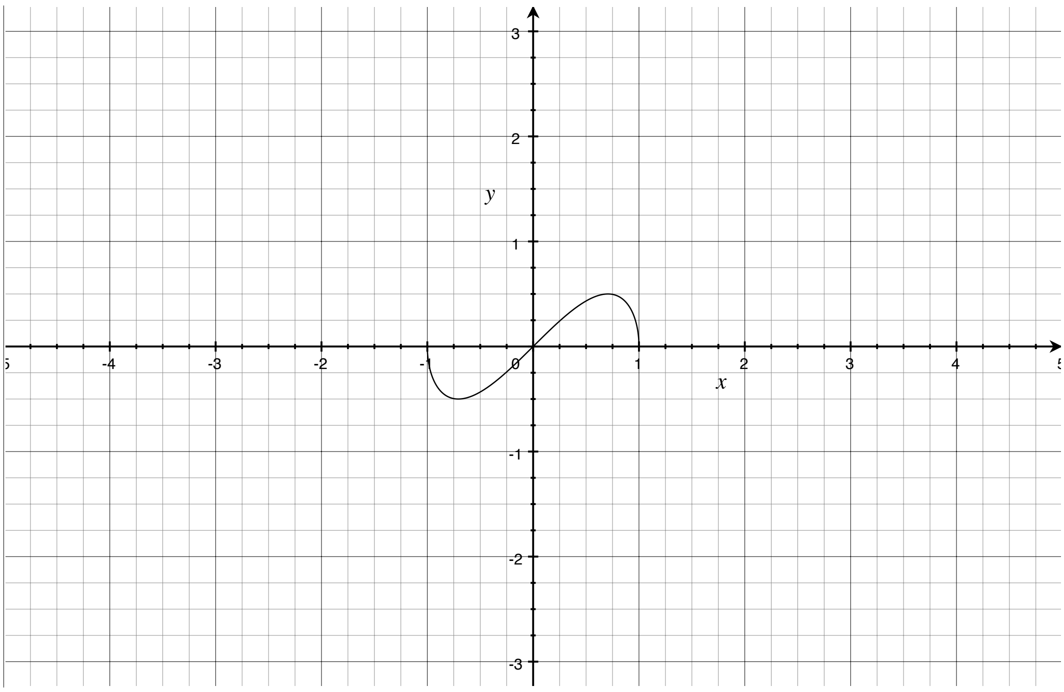

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Dunque

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4}.$$

Cambiamo variabile: $x-3=2u$, $dx=2\,du$.

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \int \frac{2\,du}{4u^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u + C.$$

Tornando alla variabile x,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

Esercizio 3. Cerchiamo di capire come si comporti il primo limite: quando x tende a $\pi/2$ per difetto, $\sin x$ tende a 1, mentre $\tan x$ diverge a $+\infty$. Perciò il limite è una forma indeterminata $[0\cdot(+\infty)]$. Osservando che

$$(\sin x-1)\tan x = (\sin x-1)\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x-1}{\cos x}\sin x,$$

è chiaro che i problemi da risolvere sono tutti nell'ultima frazione. Si verifica immediatamente che ad essa possiamo applicare il teorema di De l'Hospital, ottenendo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin x-1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin x-1}{\cos x}\sin x = 0\cdot 1 = 0.$$

Il secondo limite è invece una forma indeterminata $[0^0]$. Usiamo allora il metodo generale del logaritmo:

$$(\sin x)^x = e^{x\log(\sin x)}.$$

Da questo momento, ci interessa calcolare il

$$\lim_{x\to 0+} x \log(\sin x).$$

Ricordando un celebre limite notevole,

$$\lim_{x\to 0+} x \log(\sin x) = \lim_{x\to 0+} x \log\left(\frac{\sin x}{x} x\right) = \lim_{x\to 0+} x \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + x \log x.$$

Il primo limite non è indeterminato, e vale $0 \cdot \log 1 = 0 \cdot 0 = 0$. Il secondo limite, pur essendo del tipo $[0 \cdot \infty]$, vale zero perché x tende a zero più velocemente di quanto $\log x$ diverga, per $x \to 0^+$.

Ricapitolando, $\lim_{x\to 0+} x \log(\sin x) = 0$. Ma allora

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x = e^{\lim_{x\to 0+} x \log(\sin x)} = e^0 = 1.$$

Esercizio 4. Seguiamo il suggerimento, e tracciamo un rettangolo di perimetro unitario. Se x e y sono le misure (in metri, ma d'ora in avanti eviteremo di ripeterlo) dei lati, deve valere il vincolo

$$2x + 2y = 1.$$

L'area racchiusa vale

$$\mathscr{A} = xy = x\frac{1-2x}{2} = x\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Per evidenti ragioni geometriche, $0 \le x \le 1$.[2] Quando x varia fra zero e uno, il fattore x cresce, mentre il fattore $1/2 - x$ decresce con la stessa rapidità. È facile convincersi che $\mathscr{A}$ è massima quando i due fattori coincidono, cioè

$$x = \frac{1}{2}x,$$

ovvero

$$x = \frac{1}{4}.$$

L'area del quadrato di lato $1/4$ vale $\mathscr{A}_{\max} = \frac{1}{16}$.

Ora, qual è la circonferenza di perimetro unitario? È quella il cui raggio r soddisfa

$$2\pi r = 1,$$

cioè $r = \frac{1}{2\pi}$. L'area di tale cerchio vale

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}.$$

Poiché

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{4\pi},$$

concludiamo che è più vantaggioso utilizzare la corda per delimitare un'area circolare.

[2] La misura del lato non può essere negativa, né eccedere il perimetro.