Soluzioni

9 settembre 2014

Esercizio 1. La funzione assegnata è costruita "incollando" tre funzioni elementari: due funzioni che rappresentano rette, e una funzione che rappresenta una parabola. Osserviamo che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la tre funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a+2 \\ f_2(x) &= 2+ax \\ f_3(x) &= x^2 \end{aligned}$$

sono, prese nel rispettivo dominio di definizione specificato nell'esercizio, iniettive e suriettive. Più precisamente, $f_1((-\infty,0)) = (-\infty,a)$, $f_2([0,2)) = [2,2+2a)$ per $a > 0$, $f_2([0,2)) = [2+2a,2)$ per $a < 0$, $f_2([0,2)) = \{2\}$ per $a = 0$, e infine $f_3([2,+\infty)) = [4,+\infty)$.

Ovviamente per $a = 0$ non c'è alcuna speranza che f sia iniettiva, giacché è costante nell'intervallo $[0,2)$. Distinguiamo due casi.

Per $a > 0$, dobbiamo imporre che i tre intervalli $(-\infty,a)$, $[2,2+2a)$ e $[4,+\infty)$ non si sovrappongano. Pertanto $a \leq 2$ e $2+2a \leq 4$, cioè $a \leq 1$.

Per $a < 0$, dobbiamo imporre che i tre intervalli $(-\infty,a)$, $[2+2a,2)$ e $[4,+\infty)$ non si sovrappongano. Pertanto $a \leq 2+2a$ e $2 \leq 4$, cioè $a \geq -2$.

Ricapitolando, la funzione f è iniettiva se e solo se $a \in [-2,0) \cup (0,1]$.

Per quanto riguarda la suriettività, ogni numero $y < a$ è raggiunto da qualche $x < 0$. Ogni numero $y \geq 4$ è raggiunto da qualche $x \geq 2$. Quindi se $a \geq 4$, la funzione è suriettiva. Se $a < 4$, non siamo ancora pronti per trarre una conclusione. In questo caso, entra in gioco il "pezzo" centrale, e ci conviene distinguere due casi: (1) $a \geq 0$ e (ii) $a < 0$.

Nel caso (i), il "pezzo" centrale copre l'intervallo $[2,2+2a)$. Quindi, se $a \geq 2$, risulta coperto tutto l'asse reale e la funzione è suriettiva. Se $a < 2$ c'è un "buco" fra a e 2, e la funzione non è suriettiva.

Nel caso (ii), il "pezzo" centrale copre l'intervallo $(2+2a,2]$. Ma $2 < 4$, quindi non c'è speranza di coprire i valori di y compresi fra 2 e 4, e la funzione non può essere suriettiva.

Riassumendo, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ se e solo se $a \geq 2$.

Passiamo al secondo quesito. Poniamo $a = 1$, trovando così la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{se } x < 0 \\ 2+x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato nella Figura 1. Si nota immediatamente che la funzione è iniettiva (ma non suriettiva). Per trovare la funzione inversa f^{-1} dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 1+2x = y \\ y < 1, \end{cases}$$

cioè

$$x = \frac{y-1}{2},$$

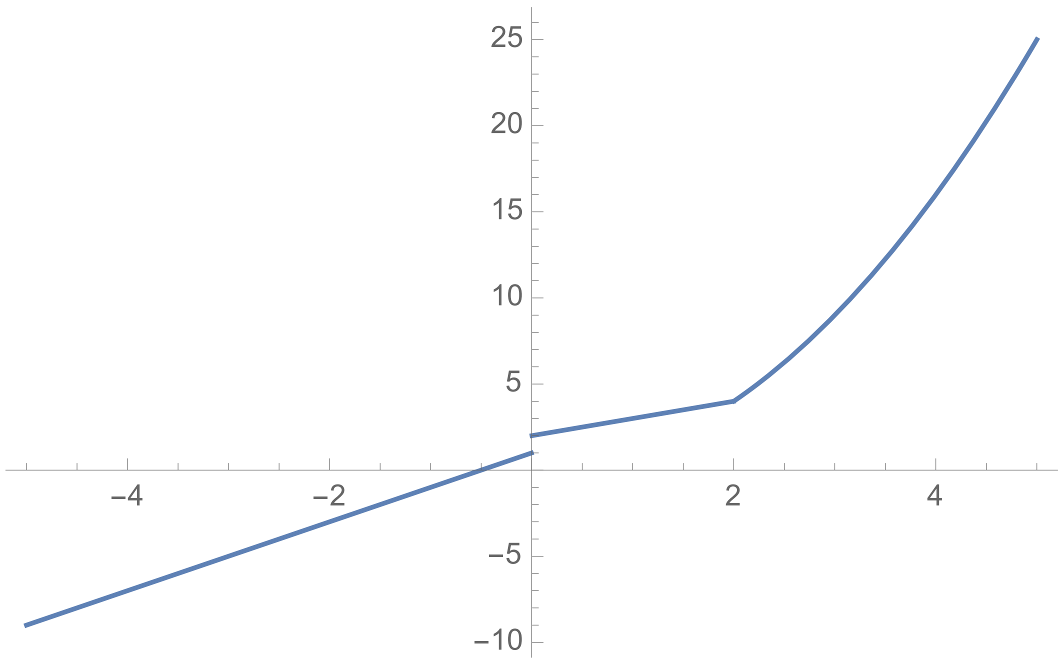

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

$$\begin{cases} 2+x=y \\ 1 \leq y < 2, \end{cases}$$

cioè

$$x = y-2,$$

e infine

$$\begin{cases} x^2=y \\ y \geq 4, \end{cases}$$

cioè $x=\sqrt{y}$. Quindi

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2} & \text{se } y<1 \\ y-2 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ \sqrt{y} & \text{se } y \geq 2. \end{cases}$$

La continuità della funzione f richiede che i tre "pezzi" si saldino senza salti, e dunque

$$\begin{cases} a=2 \\ 2+2a=4, \end{cases}$$

pertanto non esistono valori di a che rendano continua la funzione.

Esercizio 2. Il limite è (ovviamente) una forma indeterminata $[0/0]$. Tuttavia non è indispensabile ricorrere al calcolo differenziale per calcolarlo: infatti

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x \sin x + x^2} &= \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}x^2 + \frac{1-\cos x}{x^2}x^2}{x(\sin x + x)} \\ &= \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{x}}, \end{aligned}$$

e ricordando i limiti notevoli deduciamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x+x^2} = \frac{1+1/2}{1+1} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3. Si tratta di un tipico integrale da svolgere per parti (due volte). Il risultato è

$$\int (3x^2-2)\cos x\, dx = 6x\cos x - 2\sin x + 3(x^2-2)\sin x + C.$$

Esercizio 4. La funzione è definita per ogni x che non annulli il denominatore, dunque $x \neq 307/2 = 153.5$. È chiaro che

$$\lim_{x\to 307/2} f(x) = \infty,$$

e dunque $x = 307/2$ è l'equazione dell'unico asintoto verticale. Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{4},$$

la retta $y = 1/4$ è asintoto orizzontale bilatero. Conviene osservare che $f(x) \geq 0$ per ogni x appartenente al dominio di definizione, a causa del quadrato. La funzione è continua all'interno del dominio, e derivabile. La derivata prima vale

$$f'(x) = -\frac{1014(x+100)}{(2x-307)^3},$$

e si deduce che f è monotona decrescente per $x < -100$ e per $x > 307/2$. Essa è invece monotona crescente per $-100 < x < 307/2$.

Volendo si può provare a calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1014(4x+907)}{(307-2x)^4}.$$

Questa formula ha un segno che si può studiare esattamente, e si scopre in particolare un flesso (a tangente obliqua) nel punto di ascissa $x = -907/4 = -226.5$. Il grafico qualitativo riportato in Figura 2 risente della presenza di numeri molto grandi, che tendono a "schiacciare" la funzione sull'asse delle ascisse.

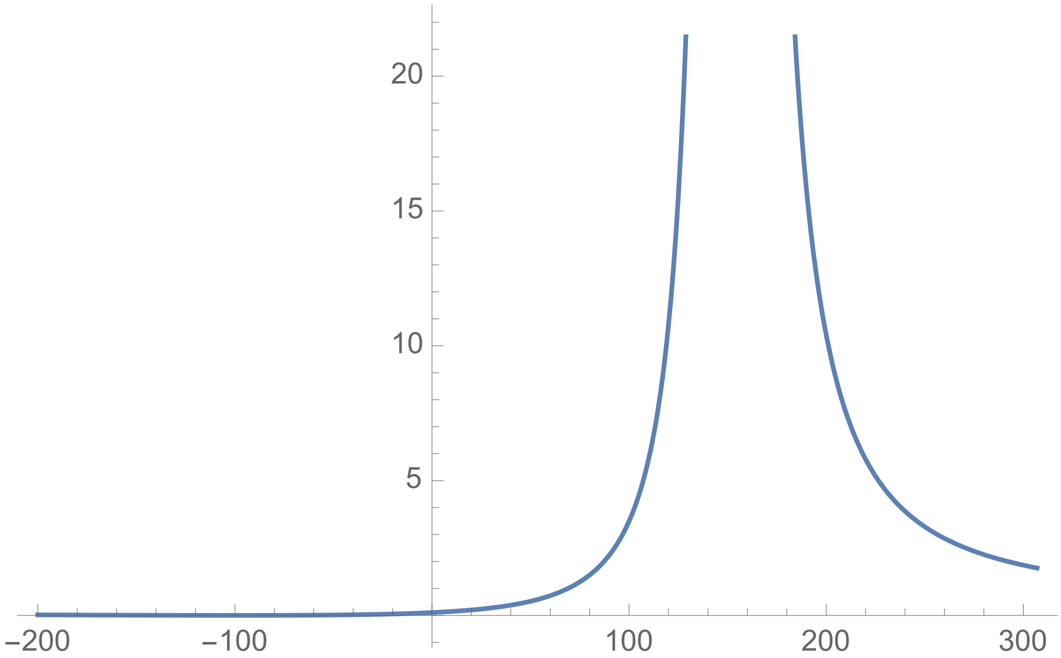

Figura 2: Grafico della funzione f, quarto esercizio.