Soluzioni

8 luglio

Esercizio 1. Per rispondere al primo quesito, dobbiamo imporre la condizione di continuità $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$. Poiché $f(-1) = -1+4+a = a+3$, e poiché $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2-2|x| = 0$, la condizione diventa $a+3=0$, cioè $a=-3$. Da questo momento, assumeremo pertanto che $a=-3$.

Per rispondere al secondo quesito, conviene procedere per via grafica. I tre "pezzi" della funzione sono grafici facilmente disegnabili: una parabola, un valoare assoluto capovolto, e un logaritmo. Nella figura 1, ecco come appare la funzione per $a=-3$. Si evince immediatamente che il punto $(-4,-3)$ è il punto di minimo assoluto e che $(0,2)$ è il punto di massimo assoluto della nostra funzione nell'intervallo $[-4,0]$.

Esercizio 2. Ovviamente esistono infinite funzioni che rispondono alle condizioni dell'esercizio. Una possibile scelta è

$$f(x) = |x+1| + |x-1|.$$

Essa è continua perché somma di due funzioni continue. Non è derivabile né in $x=-1$, né in $x=1$, mentre è derivabile in tutti gli altri punti.

Esercizio 3. L'integrale si calcola (quasi) immediatamente se abbiamo l'accortezza di spezzare la frazione:

$$\frac{\cos x + x^2 \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} + x\sin x.$$

Pertanto

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx + \int x \sin x\,dx = \log|\sin x| + \sin x - x\cos x + C.$$

Per calcolare l'integrale $\int x\sin x\,dx$ abbiamo considerato x come fattore finito e $\sin x$ come fattore differenziale, integrando poi per parti.

Esercizio 4. Nonostante l'aspetto un po' complicato, è possibile semplificare notevolmente la definizione della nostra funzione. Ricordando infatti che $x^2-1=(x+1)(x-1)$ e che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, arriviamo alla formula[1]

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x>1 \\ -\frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x<1. \end{cases}$$

Quindi ci limitiamo a studiare la funzione per $x \geq 1$. Ora,

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

La funzione è sempre positiva e continua, dunque non ammette asintoti eccetto quello orizzontale $y=0$ appena calcolato. La derivata vale

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

[1]Poiché $x^2+x+1>0$ sempre, abbiamo tolto il valore assoluto a denominatore.

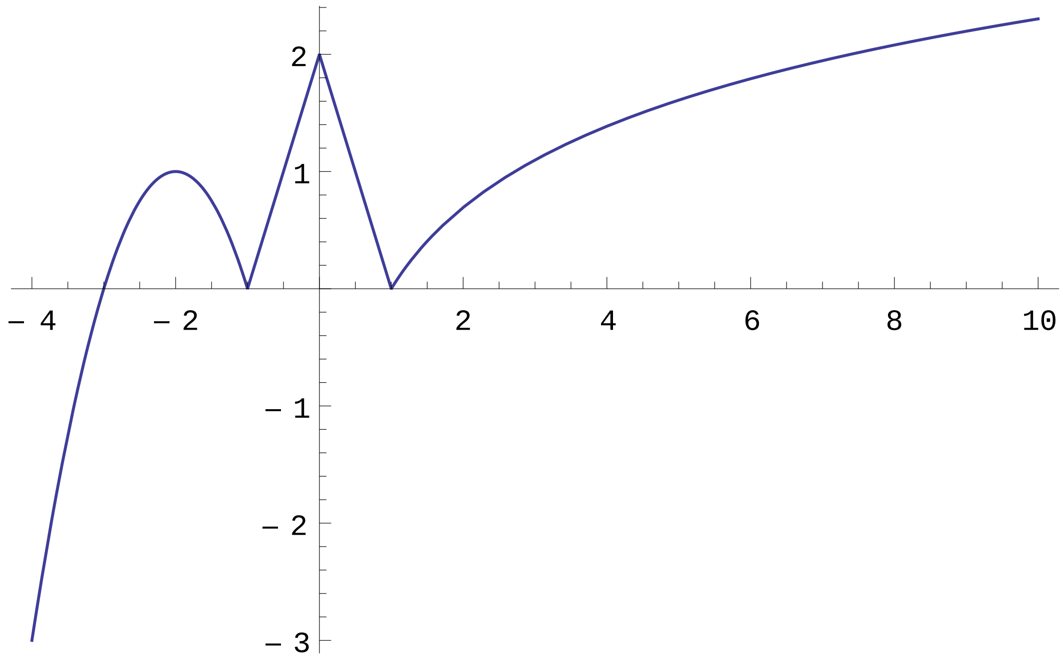

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Nell'intervallo $[1,+\infty)$ questa derivata è strettamente negativa, dunque la funzione è ivi decrescente in senso stretto. Volendo, è facile calcolare, dopo qualche semplificazione, la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(x^3+3x^2-1)}{(x^2+x+1)^3},$$

ma non è banale la ricerca delle eventuali radici del numeratore. Un'analisi più accurata dimostrerebbe che la derivata seconda è strettamente positiva nell'intervallo $[1,+\infty)$, e dunque la funzione è ivi convessa.

Veniamo adesso allo studio nell'intervallo $(-\infty,1)$. In tale dominio,

$$f(x) = -\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Dunque $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\frac{2}{3}$, mentre $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$ come prima. La derivata ora diventa, tenendo conto del segno negativo,

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Tuttavia, il numeratore ha due radici entrambe accettabili: $x=-2$ e $x=0$. Studiando il segno del prodotto $x(x+2)$, scoprima che la funzione cresce in $(-\infty,-2)$ e decresce in $(-2,0)$, per riprendere a crescere in $(0,1)$. Evitiamo di addentrarci nello studio della convessità, che diventa piuttosto difficile. Un grafico probabile approssimato è riportato in figura. Il tratto verticale è un errore numerico del software, dovuto al *salto* nel punto di discontinuità $x=1$.

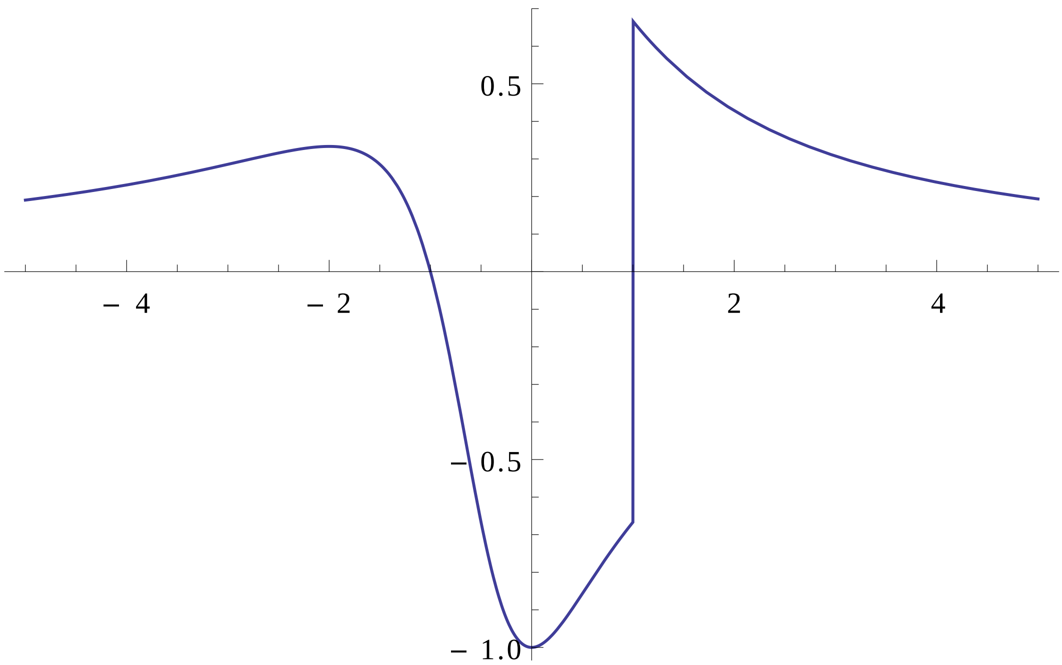

Figura 2: Grafico della funzione f, quarto esercizio.

Soluzioni

8 luglio

Esercizio 1. Per rispondere al primo quesito, dobbiamo imporre la condizione di continuità $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$. Poiché $f(-1) = 0$, e poiché $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2|x| + a = a + 2$, la condizione diventa $a + 2 = 0$, cioè $a = -2$. Da questo momento, assumeremo pertanto che $a = -3$.

Per rispondere al secondo quesito, conviene procedere per via grafica. I tre "pezzi" della funzione sono grafici facilmente disegnabili: una parabola, un valoare assoluto capovolto, e un logaritmo. Nella figura 1, ecco come appare la funzione per $a = -2$. Si evince immediatamente che il punto $(-2, 1)$ è il punto di massimo assoluto e che $(0, -2)$ è il punto di minimo assoluto della nostra funzione nell'intervallo $[-3, 1]$.

Esercizio 2. Ovviamente esistono infinite funzioni che rispondono alle condizioni dell'esercizio. Una possibile scelta è

$$f(x) = |x| + |x - 1|.$$

Essa è continua perché somma di due funzioni continue. Non è derivabile né in $x = 0$, né in $x = 1$, mentre è derivabile in tutti gli altri punti.

Esercizio 3. Nonostante l'aspetto un po' complicato, è possibile semplificare notevolmente la definizione della nostra funzione. Ricordando infatti che $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ e che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, arriviamo alla formula[1]

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x > 1 \\ -\frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Quindi ci limitiamo a studiare la funzione per $x \geq 1$. Ora,

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La funzione è sempre positiva e continua, dunque non ammette asintoti eccetto quello orizzontale $y = 0$ appena calcolato. La derivata vale

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Nell'intervallo $[1, +\infty)$ questa derivata è strettamente negativa, dunque la funzione è ivi decrescente in senso stretto. Volendo, è facile calcolare, dopo qualche semplificazione, la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 1)}{(x^2+x+1)^3},$$

ma non è banale la ricerca delle eventuali radici del numeratore. Un'analisi più accurata dimostrerebbe che la derivata seconda è strettamente positiva nell'intervallo $[1, +\infty)$, e dunque la funzione è ivi convessa.

[1] Poiché $x^2 + x + 1 > 0$ sempre, abbiamo tolto il valore assoluto a denominatore.

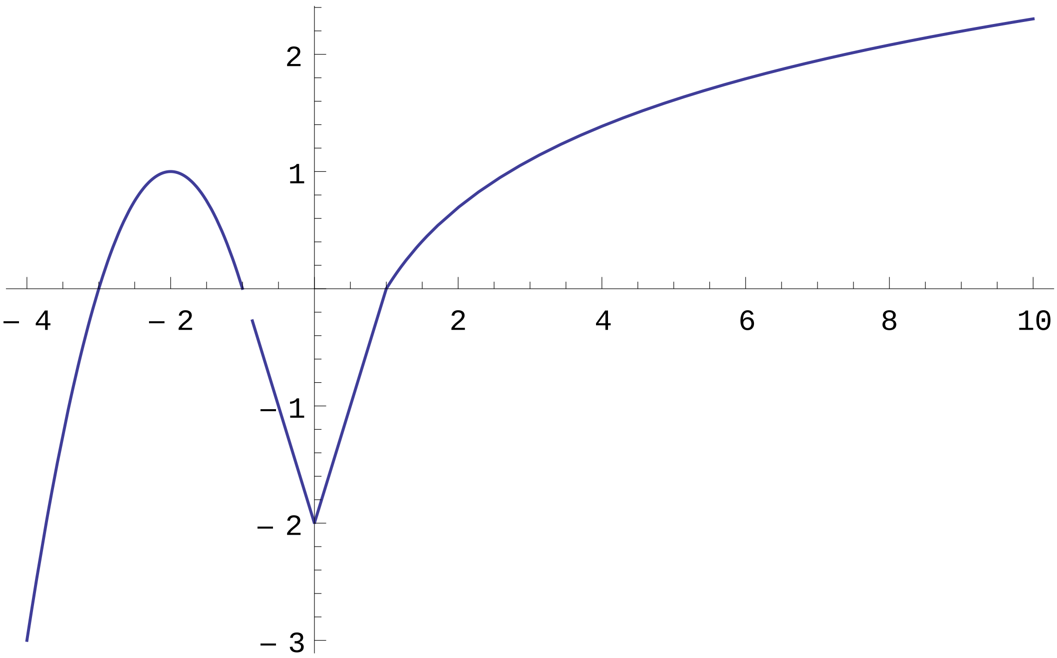

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Veniamo adesso allo studio nell'intervallo $(-\infty, 1)$. In tale dominio,

$$f(x) = -\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Dunque $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\frac{2}{3}$, mentre $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ come prima. La derivata ora diventa, tenendo conto del segno negativo,

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Tuttavia, il numeratore ha due radici entrambe accettabili: $x = -2$ e $x = 0$. Studiando il segno del prodotto $x(x+2)$, scoprima che la funzione cresce in $(-\infty, -2)$ e decresce in $(-2, 0)$, per riprendere a crescere in $(0, 1)$. Evitiamo di addentrarci nello studio della convessità, che diventa piuttosto difficile. Un grafico probabile approssimato è riportato in figura. Il tratto verticale è un errore numerico del software, dovuto al *salto* nel punto di discontinuità $x = 1$.

Esercizio 4. L'integrale si calcola (quasi) immediatamente se abbiamo l'accortezza di spezzare la frazione:

$$\frac{\sin x + x^2 \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + x \cos x.$$

Pertanto

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} + x \cos x \, dx = -\log|\cos x| + \cos x + x \sin x + C.$$

Per calcolare l'integrale $\int x \cos x \, dx$ abbiamo considerato x come fattore finito e $\cos x$ come fattore differenziale, integrando poi per parti.

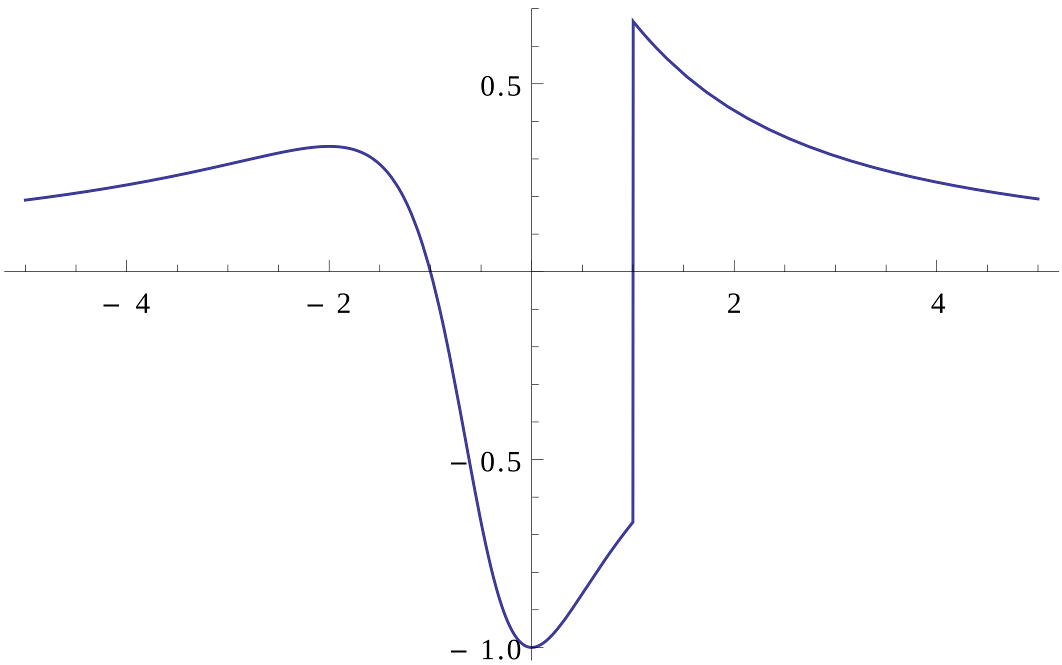

Figura 2: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Soluzioni

8 luglio

Esercizio 1. Per rispondere al primo quesito, dobbiamo imporre la condizione di continuità $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$. Poiché $f(-1) = 1$, e poiché $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} |x| + a = a + 2$, la condizione diventa $a + 2 = 1$, cioè $a = -1$. Da questo momento, assumeremo pertanto che $a = -1$.

Per rispondere al secondo quesito, conviene procedere per via grafica. I tre "pezzi" della funzione sono grafici facilmente disegnabili: una parabola, un valoare assoluto capovolto, e un logaritmo. Nella figura 1, ecco come appare la funzione per $a = -1$. Si evince immediatamente che il punto $(-4, -3)$ è il punto di minimo assoluto e che $(-2, 1)$ è il punto di minimo assoluto della nostra funzione nell'intervallo $[-3, 1]$.

Esercizio 2. Ovviamente esistono infinite funzioni che rispondono alle condizioni dell'esercizio. Una possibile scelta è

$$f(x) = |x + 2| + |x + 1|.$$

Essa è continua perché somma di due funzioni continue. Non è derivabile né in $x = 0$, né in $x = 1$, mentre è derivabile in tutti gli altri punti.

Esercizio 3. Nonostante l'aspetto un po' complicato, è possibile semplificare notevolmente la definizione della nostra funzione. Ricordando infatti che $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ e che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, arriviamo alla formula[1]

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x > 1 \\ -\frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Quindi ci limitiamo a studiare la funzione per $x \geq 1$. Ora,

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La funzione è sempre positiva e continua, dunque non ammette asintoti eccetto quello orizzontale $y = 0$ appena calcolato. La derivata vale

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Nell'intervallo $[1, +\infty)$ questa derivata è strettamente negativa, dunque la funzione è ivi decrescente in senso stretto. Volendo, è facile calcolare, dopo qualche semplificazione, la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^3},$$

ma non è banale la ricerca delle eventuali radici del numeratore. Un'analisi più accurata dimostrerebbe che la derivata seconda è strettamente positiva nell'intervallo $[1, +\infty)$, e dunque la funzione è ivi convessa.

[1] Poiché $x^2 + x + 1 > 0$ sempre, abbiamo tolto il valore assoluto a denominatore.

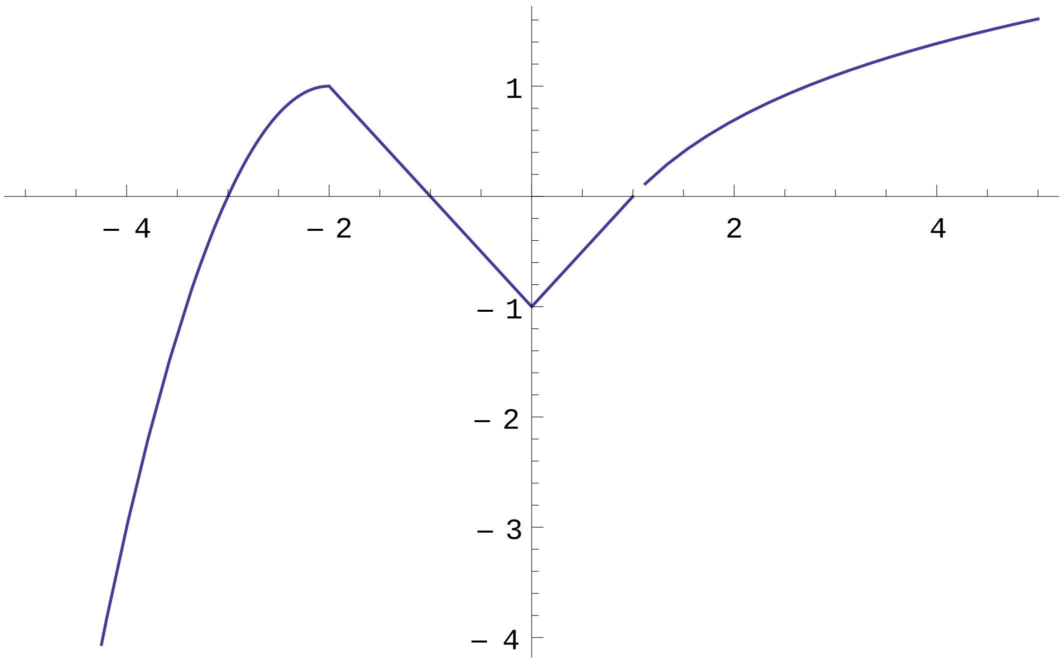

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Veniamo adesso allo studio nell'intervallo $(-\infty, 1)$. In tale dominio,

$$f(x) = -\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Dunque $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\frac{2}{3}$, mentre $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ come prima. La derivata ora diventa, tenendo conto del segno negativo,

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Tuttavia, il numeratore ha due radici entrambe accettabili: $x = -2$ e $x = 0$. Studiando il segno del prodotto $x(x+2)$, scoprima che la funzione cresce in $(-\infty, -2)$ e decresce in $(-2, 0)$, per riprendere a crescere in $(0, 1)$. Evitiamo di addentrarci nello studio della convessità, che diventa piuttosto difficile. Un grafico probabile approssimato è riportato in figura. Il tratto verticale è un errore numerico del software, dovuto al *salto* nel punto di discontinuità $x = 1$.

Esercizio 4. Per calcolare l'integrale, spezziamo la frazione:

$$\frac{-\sin x + x\cos^2 x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} + x\cos x.$$

Integrando,

$$\int \frac{-\sin x + x\cos^2 x}{\cos x} dx = \log|\cos x| + \cos x + x\sin x + C,$$

dove abbiamo integrato per parti $x\cos x$ scegliendo x come fattore finito e $\cos x$ come fattore differenziale.

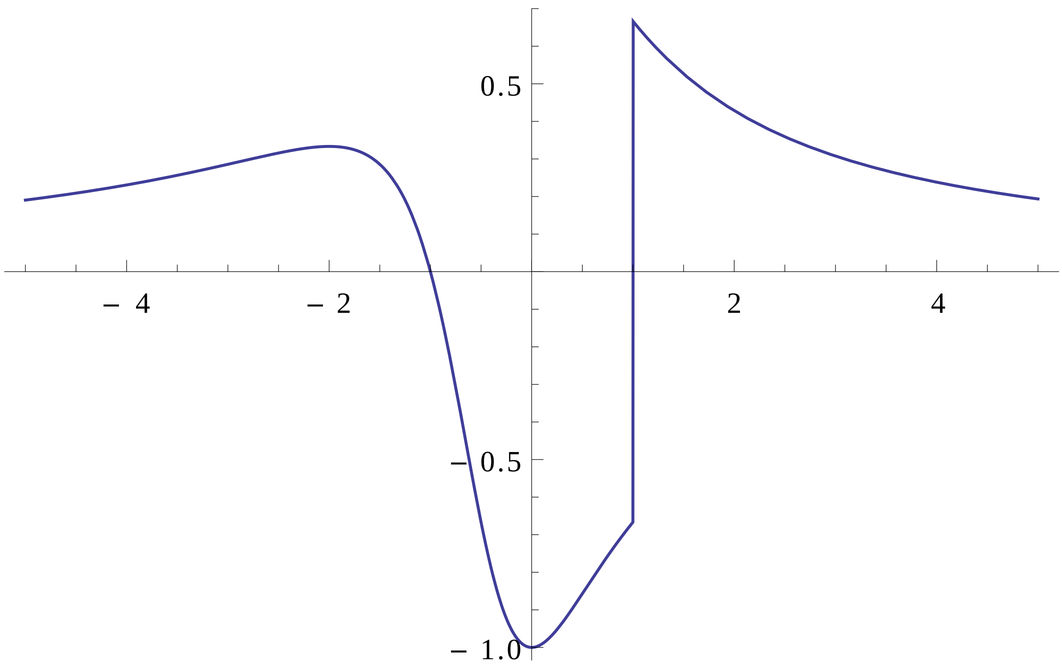

Figura 2: Grafico della funzione f, terzo esercizio.