Soluzioni

15 aprile 2014

Esercizio 1. L'enunciato del teorema di Fermat è il seguente.

Teorema 1. *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0\in(a,b)$ un punto di massimo o minimo (locale o globale). Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0)=0$.*

Esercizio 2. Fissato $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, la funzione f è evidentemente continua in ciascun intervallo $(-\infty,n)$, $(-n,n)$, e $(n,+\infty)$. Resta da capire se sia continua anche nei due punti di separazione $x_1=-n$ e $x_2=n$.

Poiché $f(-n)=0$ e $\lim_{x\to -n-} f(x)=\lim_{x\to -n-} a_n+b_nx=a_n-nb_n$, una prima condizione è che

$$a_n-nb_n=0.$$

Similmente, poiché $f(n)=a_n+nb_n$ e $\lim_{x\to n+} f(x)=1$, la seconda condizione è

$$a_n+nb_n=1.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_n-nb_n=0\\ a_n+nb_n=1\end{cases}$$

nelle incognite a_n e b_n. Procedendo per sostituzione,[1] Ricaviamo

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{2}\\ b_n=\frac{1}{2n}.\end{cases}$$

Questi sono gli unici valori dei parametri che rendano continua la funzione in tutto l'insieme di definizione $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (A) Dobbiamo naturalmente spezzare l'integrale in base alle diverse definizioni della funzione:

$$\int_{-2}^{-1}+\int_{-1}^{1}+\int_{1}^{3}.$$

Ora,

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x^2-1}\,dx=\left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\right]_{-2}^{-1}=-\sqrt{3}.$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x-1)\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1,$$

e infine

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{1}^{3}2^{x-4}\,dx=\left[\frac{2^{x-4}}{\log 2}\right]_{1}^{3}=\frac{3}{8\log 2}.$$

Sommando, l'integrale desiderato vale $-\sqrt{3}-1+\frac{3}{8\log 2}$.

[1] O con qualunque altra tecnica risolutiva nota allo studente.

(B) Prima di lanciarci nella sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, di sicuro successo ma maledettamente penosa, seguiamo il suggerimento, e aggiungiamo e sottraiamo 1:

$$\frac{2\cos x}{\sin x + \cos x} - 1 + 1 = \frac{2\cos x - \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 1 = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 1.$$

Quindi

$$\int \frac{2\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 1 \right) dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx + x.$$

Ma

$$\cos x - \sin x = \frac{d}{dx}(\sin x + \cos x),$$

quindi anche l'ultimo integrale è quasi immediato:

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \log|\sin x + \cos x| + C.$$

Pertanto concludiamo che

$$\int \frac{2\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \log|\sin x + \cos x| + x + C,$$

dove C è la solita costante arbitraria di integrazione.

Esercizio 4. Il dominio di definizione è costituito dai valori reali di x tali che $|x| > 0$, cioè qualunque valore di x *escluso* $x = 0$. Il dominio coincide con $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Usando la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$$

deriva subito dal comportamento in zero del logaritmo.

Lo studio del segno appare fuori dalla portata, e passiamo oltre. La retta $x = 0$ è l'unico asintoto verticale, mentre non possono esistere asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty.$$

La derivata prima è espressa dalla formula

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x} \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Poiché $f'(x) \geq 0$ equivale a

$$\frac{1 - 2x^2}{x} \geq 0$$

sotto la condizione $x \neq 0$, deduciamo che la funzione è crescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, crescente in $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e decrescente in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 = -\frac{1 + 2x^2}{x^2}.$$

Poiché numeratore e denominatore sono quantità strettamente positive nel dominio di definizione, la funzione è concava in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Il grafico qualitativo è riportato in Figura 1.

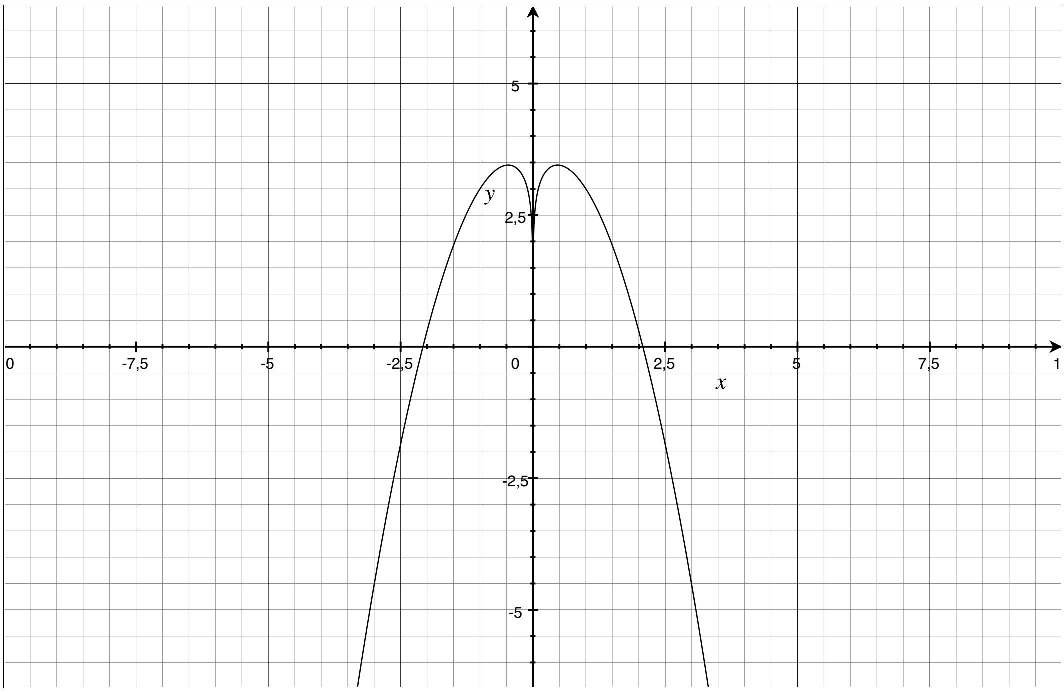

Figura 1: Grafico della funzione f, quarto esercizio.

Soluzioni

15 aprile 2014

Esercizio 1. L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente.

Teorema 1. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che f sia derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora esiste almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Esercizio 2. Fissato $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, la funzione f è evidentemente continua in ciascun intervallo $(-\infty,n)$, $(-n,n)$, e $(n,+\infty)$. Resta da capire se sia continua anche nei due punti di separazione $x_1=-n$ e $x_2=n$.

Poiché $f(-n)=0$ e $\lim_{x\to-n-}f(x)=\lim_{x\to-n-}a_n-b_nx=a_n+nb_n$, una prima condizione è che

$$a_n+nb_n=0.$$

Similmente, poiché $f(n)=a_n+nb_n$ e $\lim_{x\to n+}f(x)=1$, la seconda condizione è

$$a_n-nb_n=2.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_n+nb_n=0\\ a_n-nb_n=2\end{cases}$$

nelle incognite a_n e b_n. Procedendo per sostituzione,[1] Ricaviamo

$$\begin{cases} a_n=1\\ b_n=-\frac{1}{n}.\end{cases}$$

Questi sono gli unici valori dei parametri che rendano continua la funzione in tutto l'insieme di definizione $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (A) Dobbiamo naturalmente spezzare l'integrale in base alle diverse definizioni della funzione:

$$\int_{-3}^{-1}+\int_{-1}^{1}+\int_{1}^{2}.$$

Ora,

$$\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx=\int_{-3}^{-1}x\sqrt{x^2-1}\,dx=\left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\right]_{-3}^{-1}=-\frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x-1)\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1,$$

e infine

$$\int_{1}^{2}f(x)\,dx=\int_{1}^{2}2^{x-4}\,dx=\left[\frac{2^{x-4}}{\log 2}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{8\log 2}.$$

[1] O con qualunque altra tecnica risolutiva nota allo studente.

Sommando, l'integrale desiderato vale $-\frac{16}{3}\sqrt{2}-1+\frac{1}{8\log 2}$.

(B) Prima di lanciarci nella sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, di sicuro successo ma maledettamente penosa, seguiamo il suggerimento, e scriviamo innanzitutto

$$\frac{4\cos x}{\sin x+\cos x} = 2\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x},$$

concentrandoci su $\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}$. Ora aggiungiamo e sottraiamo 1:

$$\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}-1+1 = \frac{2\cos x-\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}+1 = \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1.$$

Quindi

$$\int \frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1\right)dx = \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx + x.$$

Ma

$$\cos x-\sin x = \frac{d}{dx}(\sin x+\cos x),$$

quindi anche l'ultimo integrale è quasi immediato:

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \log|\sin x+\cos x|+C.$$

Pertanto concludiamo che

$$\int \frac{4\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = 2(\log|\sin x+\cos x|+x)+C,$$

dove C è la solita costante arbitraria di integrazione.

Esercizio 4. Il dominio di definizione è costituito dai valori reali di x tali che $|x|>0$, cioè qualunque valore di x *escluso* $x=0$. Il dominio coincide con $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Usando la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = -\infty$$

deriva subito dal comportamento in zero del logaritmo.

Lo studio del segno appare fuori dalla portata, e passiamo oltre. La retta $x=0$ è l'unico asintoto verticale, mentre non possono esistere asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \mp\infty.$$

La derivata prima è espressa dalla formula

$$f'(x) = \frac{1}{x}-2x = \frac{1-2x^2}{x} \quad \text{per ogni } x\neq 0.$$

Poiché $f'(x)\geq 0$ equivale a

$$\frac{1-2x^2}{x}\geq 0$$

sotto la condizione $x\neq 0$, deduciamo che la funzione è crescente in $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, crescente in $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e decrescente in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

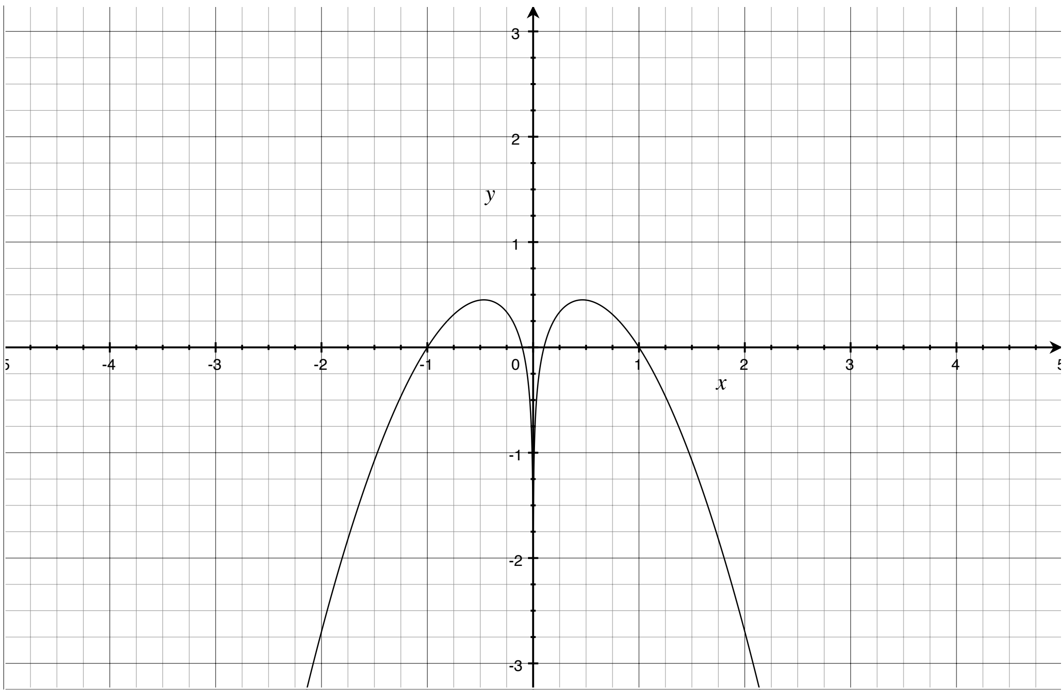

Figura 1: Grafico della funzione f, quarto esercizio.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 = -\frac{1+2x^2}{x^2}.$$

Poiché numeratore e denominatore sono quantità strettamente positive nel dominio di definizione, la funzione è concava in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Il grafico qualitativo è riportato in Figura 1.

Soluzioni

15 aprile 2014

Esercizio 1. L'enunciato del teorema di Weierstrass è il seguente.

Teorema 1. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f possiede almeno un punto di minimo assoluto e un punto di massimo assoluto in $[a,b]$.*

Esercizio 2. Fissato $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, la funzione f è evidentemente continua in ciascun intervallo $(-\infty,n)$, $(-n,n)$, e $(n,+\infty)$. Resta da capire se sia continua anche nei due punti di separazione $x_1=-n$ e $x_2=n$.

Poiché $f(-n)=-1$ e $\lim_{x\to -n-} f(x)=\lim_{x\to -n-} -a_n+b_n x=-a_n-nb_n$, una prima condizione è che

$$-a_n-nb_n=-1.$$

Similmente, poiché $f(n)=-a_n+nb_n$ e $\lim_{x\to n+} f(x)=1$, la seconda condizione è

$$-a_n+nb_n=1.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -a_n-nb_n=-1 \\ -a_n+nb_n=1 \end{cases}$$

nelle incognite a_n e b_n. Procedendo per sostituzione,[1] Ricaviamo

$$\begin{cases} a_n=0 \\ b_n=\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Questi sono gli unici valori dei parametri che rendano continua la funzione in tutto l'insieme di definizione $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (A) Dobbiamo naturalmente spezzare l'integrale in base alle diverse definizioni della funzione:

$$\int_{-2}^{-1}+\int_{-1}^{1}+\int_{1}^{2}.$$

Ora,

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x^2-1}\,dx=\left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\right]_{-2}^{-1}=-\sqrt{3}.$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x-2)\,dx+\int_{0}^{1}(x-2)\,dx=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3,$$

e infine

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\int_{1}^{2} 2^{x-4}\,dx=\left[\frac{2^{x-4}}{\log 2}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{8\log 2}.$$

Sommando, l'integrale desiderato vale $-\sqrt{3}-3+\frac{1}{8\log 2}$.

[1] O con qualunque altra tecnica risolutiva nota allo studente.

(B) Prima di lanciarci nella sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, di sicuro successo ma maledettamente penosa, seguiamo il suggerimento, e aggiungiamo e sottraiamo 1:

$$\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}-1+1=\frac{2\cos x-\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}+1=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1.$$

Quindi

$$\int \frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1\right)dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+x.$$

Ma

$$\cos x-\sin x=\frac{d}{dx}(\sin x+\cos x),$$

quindi anche l'ultimo integrale è quasi immediato:

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\log|\sin x+\cos x|+C.$$

Pertanto concludiamo che

$$\int\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\log|\sin x+\cos x|+x+C,$$

dove C è la solita costante arbitraria di integrazione.

Esercizio 4. Il dominio di definizione è costituito dai valori reali di x tali che $|x|>0$, cioè qualunque valore di x *escluso* $x=0$. Il dominio coincide con $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Usando la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x)=-\infty$$

deriva subito dal comportamento in zero del logaritmo.

Lo studio del segno appare fuori dalla portata, e passiamo oltre. La retta $x=0$ è l'unico asintoto verticale, mentre non possono esistere asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\mp\infty.$$

La derivata prima è espressa dalla formula

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}\quad \text{per ogni } x\neq 0.$$

Poiché $f'(x)\geq 0$ equivale a

$$\frac{1-2x^2}{x}\geq 0$$

sotto la condizione $x\neq 0$, deduciamo che la funzione è crescente in $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, crescente in $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e decrescente in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

La derivata seconda vale

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-2=-\frac{1+2x^2}{x^2}.$$

Poiché numeratore e denominatore sono quantità strettamente positive nel dominio di definizione, la funzione è concava in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$.

Il grafico qualitativo è riportato in Figura 1.

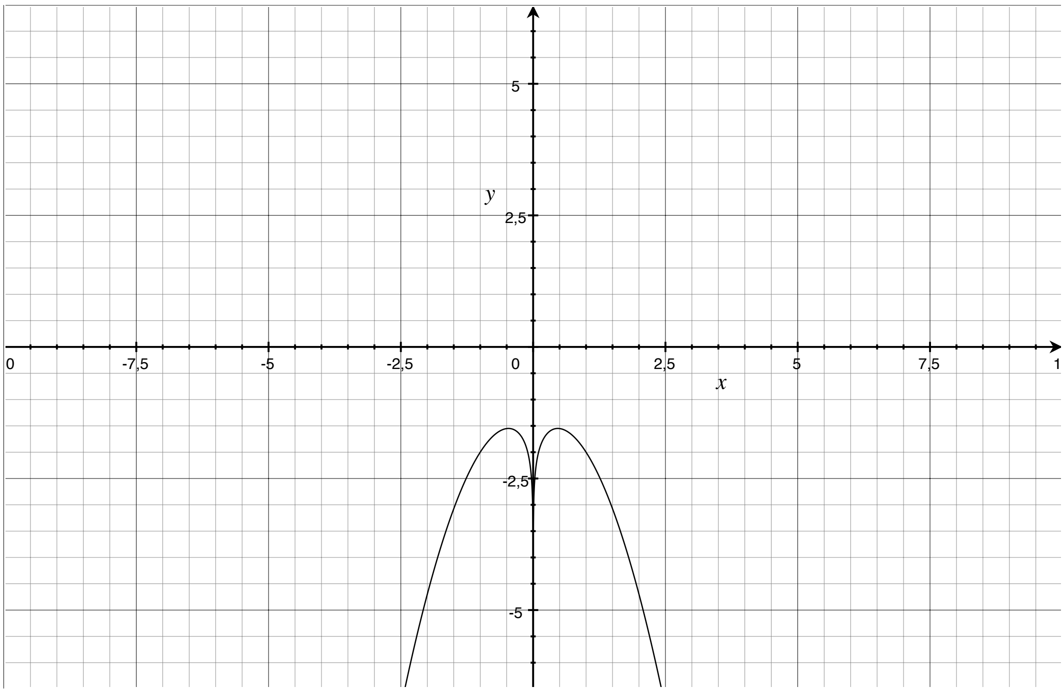

Figura 1: Grafico della funzione f, quarto esercizio.