Soluzioni

7 ottobre 2014

Esercizio 1. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, utilizzando il confronto fra infiniti, deduciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log^3 x - \log^2 x}}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log^3 x}}{x^2}.$$

Se poniamo $u = \log x \to +\infty$, il limite diventa

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{u^3}}{e^{2u}} = \lim_{u\to+\infty} e^{u^3-3u} = +\infty.$$

Esercizio 2. Ricordiamo che, in base alla definizione di continuità, l'esercizio ci chiede di dimostrare quanto segue: « per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3$ ».

A tale scopo, ricordiamo la formula di scomposizione

$$x^3 - x_0^3 = (x-x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2).$$

Prendiamo $\varepsilon > 0$ aribitrariamente, e poniamo

$$\delta < \min\left\{x_0, \frac{\varepsilon}{7x_0^2}\right\}$$

per $x_0 \neq 0$. In particolare, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $x < x_0 + \delta < x_0 + x_0 = 2x_0$, e dunque

$$\begin{aligned} \left|x^3 - x_0^3\right| &= |x-x_0|\left|x^2 + x x_0 + x_0^2\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{7x_0^2}\left(4x_0^2 + 2x_0^2 + x_0^2\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esercizio 3. La forma della funzione integrando suggerisce il cambiamento di variabile $\log x = t$, cioè $x = e^t$ e $dx = e^t\,dt$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \cos(\log x)\,dx &= \int e^t \cos t\,dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t\,dt \\ &= e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t\,dt. \end{aligned}$$

Dunque

$$\int e^t \cos t\,dt = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{2}$$

e tornando alla variabile x,

$$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x \sin(\log x) + x\cos(\log x)}{2} + C.$$

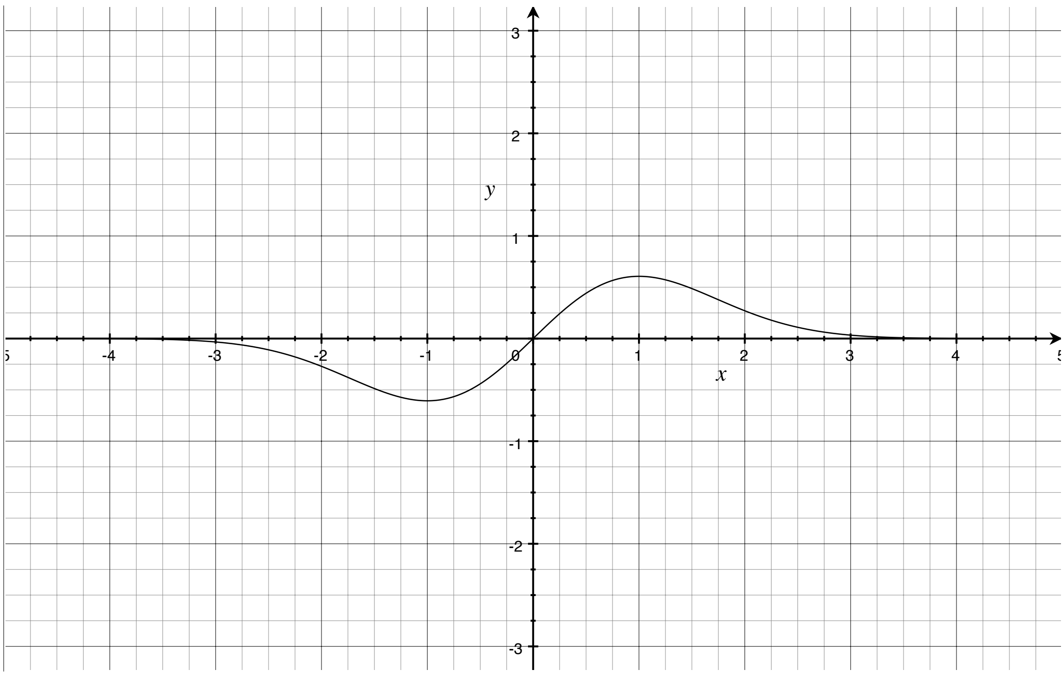

Figura 1: Grafico della funzione f, quarto esercizio.

Esercizio 4. La funzione proposta è evidentemente definita per ogni x reale. Dunque $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ai limiti del dominio, sussistono le uguaglianze

$$\lim_{x \to \pm\infty} x e^{-x^2/2} = 0.$$

Infatti l'esponenziale $e^{-x^2/2}$ tende a zero più rapidamente della potenza x. Queste relazioni di limite implicano altresì che la retta orizzontale $y = 0$ è l'unico asintoto della nostra funzione.

Osservando che ogni esponenziale è sempre strettamente positiva, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

La nostra funzione è il prodotto di due funzioni derivabili (infinite volte), e dunque possiamo calcolare senza timore di sorprese

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x^2/2}.$$

Poiché $1 - x^2 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$, la funzione cresce per $-1 < x < 1$ e decresce per $x < -1$ e per $x > 1$. Il punto di ascissa $x = -1$ è un punto di minimo assoluto, e il punto di ascissa $x = 1$ è un massimo assoluto. Volendo, è anche facile calcolare

$$f''(x) = \left(x^2 - 3\right) x e^{-x^2/2}.$$

Questa formula ci mostra che i punti di ascisse $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$ sono tre flessi a tangente obliqua. Il grafico qualitativo è riportato nella Figura 1.