

# Esame di matematica

Docente: Simone Secchi

4 febbraio 2014

Nome:.....

Cognome:.....

Matricola:.....

**Esercizio 1.** È assegnata la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$ .

- (a) Dimostrare che gli integrali impropri  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  e  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  sono convergenti.
- (b) Calcolare il valore dell'integrale improprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

*Suggerimento:* per il punto (b), osservare che  $f(-x) = \dots$  e dunque  $f$  è una funzione ...

**Esercizio 2.** Studiare l'andamento qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1},$$

e tracciarne un grafico approssimato. È richiesta anche l'analisi della derivata seconda.

**Esercizio 3.** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2}, \quad (2)$$

al variare dei due parametri interi positivi  $m$  e  $n$ .

**Esercizio 4.** Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e derivabile in  $(a, b)$  tale che  $|f'(x)| \leq 2$  per ogni  $x \in (a, b)$ , quanto può valere, al massimo,  $|f(b) - f(a)|$ ?