Soluzioni

4 febbraio 2014

Esercizio 1. Dalla disuguaglianza $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, valida per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, deduciamo che

$$\left| \frac{\sin x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

Poiché

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to -\infty} \arctan 0 - \arctan a = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \to +\infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{\pi}{2},$$

i due integrali impropri del punto (a) sono convergenti per il teorema del confronto.

Per rispondere al punto (b), poiché $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{\sin x}{x^2+1} = -f(x)$, la funzione f è dispari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. In particolare, l'area sottesa dal grafico per $x > 0$ è uguale ma di segno opposto all'area sottesa dal grafico per $x < 0$. Le due aree si bilanciano esattamente, e l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$.

Esercizio 2. La funzione è globalmente definita, cioè il suo dominio di definizione naturale è $\mathbb{R}$. Il denominatore è strettamente positivo, mentre il numeratore è positivo per $x > 0$, nullo per $x = 0$, negativo per $x < 0$.

I limiti all'infinito sono banali, poiché il numeratore è un polinomio di ordine superiore a quello del denominatore. Dunque

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Non esistono né asintoti verticali né asintoti orizzontali. Invece, ooservando che

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

si vede chiaramente che $y = x$ è asintoto obliquo sia destro che sinistro (perché $\frac{x}{x^2+1}$ tende a zero per $x \to \pm\infty$).

La funzione è espressa mediante un rapporto fra funzioni derivabili infinite volte, dunque risulta derivabile, e

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Dall'ultima espressione è evidente che la funzione è sempre strettamente crescente. Dopo qualche calcolo e qualche semplificazione di monomi simili,

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

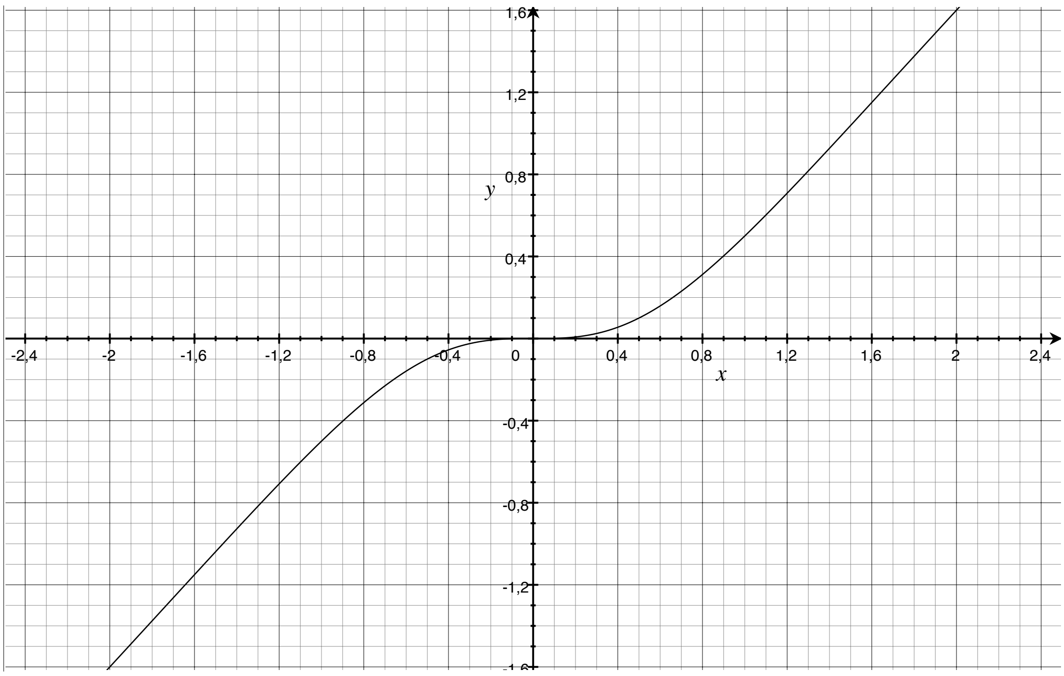

Figura 1: Grafico della funzione f, secondo esercizio.

Il numeratore si annulla per $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. La derivata seconda è positiva per $x < -\sqrt{3}$ e per $0 < x < \sqrt{3}$, negativa per $-\sqrt{3} < x < 0$ e per $x > \sqrt{3}$. La funzione presenta tre punti di flesso: $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$.

Il grafico della funzione è riportato nella Figura 1.

Esercizio 3. Conviene cambiare variabile nel primo limite, ponendo ad esempio $u = 1 - x$, sicché $u \to 0$ per $x \to 1$. Prendendo il logaritmo, ci riconduciamo al limite

$$\lim_{u \to 0} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}u\right) \log(1+u).$$

Ma

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}u\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}u\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}u\right) \log(1+u) &= \lim_{u \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)} \log(1+u) \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)} \frac{\log(1+u)}{u} u \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)} \frac{\log(1+u)}{u} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Non dimentichiamo che di questo risultato dobbiamo prendere l'esponenziale, e concludiamo che il primo limite proposto vale $e^{\frac{2}{\pi}}$.

Per calcolare il secondo limite, ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\cos(mx) \sim 1 - \frac{1}{2}m^2x^2, \quad \cos(nx) \sim 1 - \frac{1}{2}n^2x^2.$$

Dunque

$$\frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2} \sim \frac{1 - \frac{1}{2}m^2x^2 - \left(1 - \frac{1}{2}n^2x^2\right)}{x^2} = \frac{1}{2}(n^2 - m^2).$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2}.$$

Esercizio 4. È una tipica applicazione del teorema del valor medio di Lagrange. Sappiamo che esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Quindi

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)|(b - a) \leq 2(b - a).$$

Deduciamo che $|f(b) - f(a)|$ può valere al più $2(b - a)$. Osserviamo che, per la funzione $f(x) = 2x$, risulta $|f'(x)| \leq 2$ e $|f(b) - f(a)| = |2b - 2a| = 2(b - a)$. Quindi la stima è ottimale.