Soluzioni

20 febbraio 2013

Esercizio 1. Basta osservare che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \log|x|}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2x+3} - \frac{\log|x|}{2x+3}.$$

La prima frazione ha la forma $[0/\infty]$, mentre la seconda tende a zero per la gerarchia degli infiniti. Il limite vale dunque zero.

Esercizio 2. Osserviamo innanzitutto che $f(0) = b - a$, in base alla definizione. Imponiamo ora che i limiti direzionali in zero coincidano con $b - a$. Poiché[1]

$$\lim_{x\to0+} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to0+} \frac{\sin(ax)}{ax} a = a$$

e $\lim_{x\to0-} bx + b - a = b - a$, dobbiamo richiedere che $a = b - a$, cioè $b = 2a$. Questa è la condizione di continuità in zero. Evidentemente, in tutti gli altri punti la funzione è continua.

Passiamo alla derivabilità. Evidentemente la funzione ha una derivata sinistra uguale a b. Per calcolare la derivata destra, usiamo direttamente il limite del rapporto incrementale:

$$D_+f(0) = \lim_{h\to0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0+} \frac{\frac{\sin(ah)}{h} - b + a}{h} = \lim_{h\to0+} \frac{\sin(ah) - bh + ah}{h^2}.$$

Ma $b = 2a$, perché la continuità è una condizione necessaria per la derivabilità. Il limite si riduce a

$$\lim_{h\to0+} \frac{\sin(ah) - ah}{h^2} = 0,$$

usando ad esempio il teorema di De l'Hospital. La condizione $D_-f(0) = D_+f(0)$ si legge $b = 0$. Quindi l'unica scelta che garantisce la derivabilità è $b = 0$ e $a = b/2 = 0$.

Esercizio 3. La funzione è evidentemente definita ovunque. Agli estremi valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

poiché la frazione tende a 1 e x diverge. La scrittura della funzione suggerisce che la retta $y = x - 1$ sia un asintoto obliquo destro; infatti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0.$$

Similmente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^x}{e^x+1} = 0,$$

e $y = x$ è l'asintoto obliquo sinistro.

[1] Assumiamo implicitamente $a \neq 0$. Il caso $a = 0$ rende il tratto di destra di f identicamente nullo, ed è facile verificare che la condizione di continuità si riduce a $b = 0$.

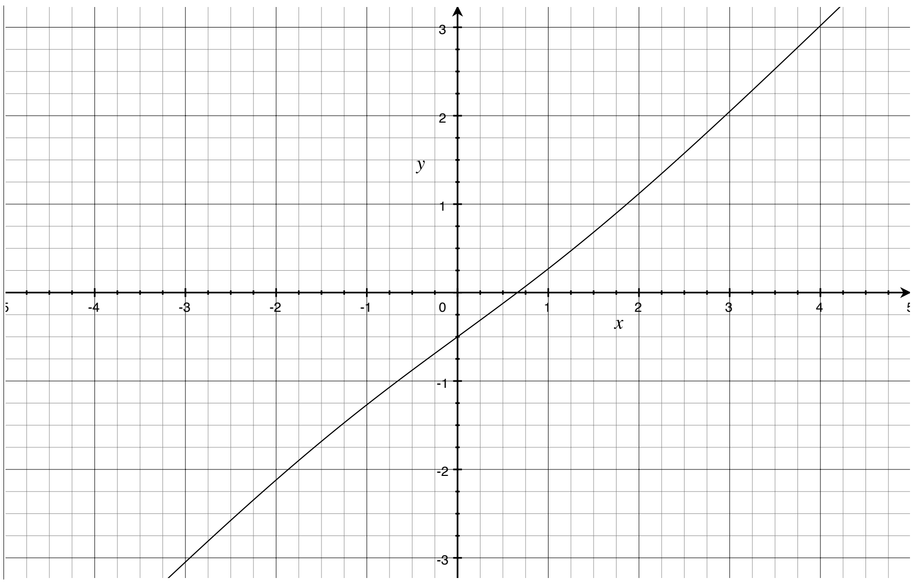

Figura 1: Grafico della funzione f.

La derivata prima, che esiste per le note regole di derivazione, ha la forma

$$Df(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Posto $z = e^x$, la disequazione $Df(x) \geq 0$ diventa $z^2 + z + 1 \geq 0$, che è sempre soddisfatta. Dunque f è una funzione monotona crescente.

La derivata seconda, come si verifica dopo qualche semplificazione, vale

$$D^2 f(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}.$$

Il segno della derivata seconda coincide con il segno del termine $e^x - 1$, e dunque f è convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$. Il punto $x = 0$ è allora un flesso (a tangente obliqua, perché sappiamo che non esistono punti critici). Siamo pronti per abbozzare un grafico qualitativo dell'andamento di f.

Esercizio 4. L'integrale indefinito si calcola facilmente per parti:

$$\int \log x \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Per il teorema di Torricelli,

$$\int_1^5 \log x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=5} = \frac{4 - \log 5}{5}.$$