Soluzioni

17 ottobre 2013

Esercizio 1. Il modo più veloce per risolvere il limite proposto passa per il cambiamento di variabile $1/x = y$, in modo che $y \to 0$. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y\to0} \frac{\sin y - 1 + \cos y}{y}.$$

Adesso bastano i limiti notevoli:

$$\lim_{y\to0} \frac{\sin y - 1 + \cos y}{y} = \lim_{y\to0} \frac{\sin y}{y} + \frac{\cos y - 1}{y^2} y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Esercizio 2. Cominciamo ad occuparci dell'insieme A. Fissato $x \in \mathbb{R}$, esiste sempre un numero reale y tale che $y \geq x - 1$. Pertanto $A \supset \mathbb{R}$, ed essendo evidentemente $A \subset \mathbb{R}$, concludiamo che $A = \mathbb{R}$. In particolare, $\inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$.

Passiamo ora all'insieme B. L'equazione $x^2 - 2x + c = 0$ equivale a $x^2 - 2x + 1 - 1 + c = 0$, cioè a $(x-1)^2 + c - 1 = 0$. Dunque $(x-1)^2 = 1 - c$, e questa equazione possiede almeno una soluzione reale se e solo se $1 - c \geq 0$. Quindi $B = (-\infty, 1]$. Concludiamo che $\inf B = -\infty$ e $\sup B = 1 = \max B$.

Esercizio 3. La formula che definisce la funzione f è calcolabile qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Pertanto il dominio di definizione coincide con $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché il segno di una radice cubica coincide con il segno del suo argomento, e poiché il denominatore della frazione è sempre positivo, concludiamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$. I limiti agli estremi sono immediati:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^{1/3} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^{1/3} = 0.$$

La funzione è ottenuta per composizione di funzioni continue e derivabili, e dunque tale risulta. Possiamo calcolare

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{3\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^{2/3} (x^2+3)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{3(x-1)^{2/3}(x^2+3)^{4/3}}.$$

In particolare, osserviamo che nel punto $x = 1$ l'espressione della derivata non è definita. E infatti

$$\lim_{x\to1} f'(x) = +\infty.$$

L'equazione $-x^2 + 2x + 3 = 0$ possiede le due soluzione reali $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Il numeratore di $f'(x)$ è positivo per valori interni all'intervallo $[x_1, x_2]$, mentre tutti gli altri fattori hanno segno positivo. A questo punto le proprietà di monotonia della nostra funzione sono chiare. Non ci avventuriamo nel calcolo della derivata seconda, che risulta un po' pesante; inoltre il segno della derivata seconda non è analizzabile con metodi elementari.

Il grafico della funzione è riportato nella Figura 1.

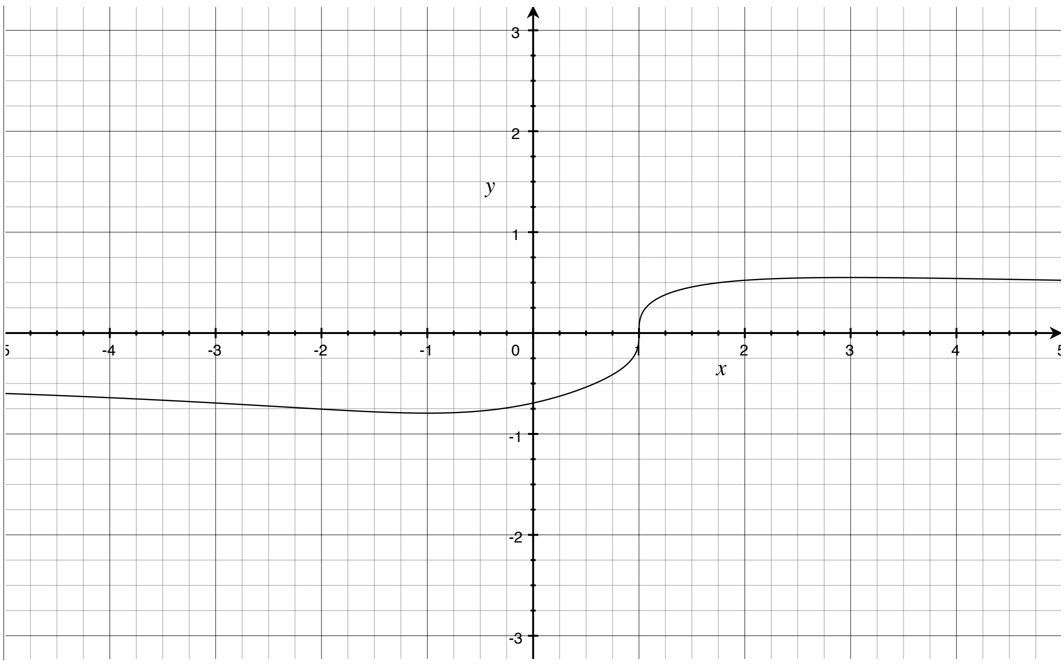

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

Esercizio 4. Traduciamo in linguaggio matematico l'enunciato dell'esercizio. Dobbiamo trovare le funzioni derivabili y tali che

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2}.$$

Ma questa è un'equazione differenziale lineare del primo ordine della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, con $a(x) = 1/2$ e $b(x) = 0$ per ogni x. Utilizzando la formula risolutiva, troviamo

$$y(x) = Ke^{\frac{x}{2}}, \quad K \text{ costante reale arbitraria.}$$