Soluzioni

17 aprile 2013

Esercizio 1. Seguiamo il suggerimento, ponendo $A = (x+1)^{1/3}$ e $B = x^{1/3}$:

$$(x+1) - x = \left((x+1)^{1/3} - x^{1/3}\right)\left((x+1)^{2/3} + x^{1/3}(x+1)^{1/3} + x^{2/3}\right).$$

Pertanto, osservando che $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{1/3}/x^{1/3} = 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{2/3}\left((x+1)^{1/3} - x^{1/3}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}\frac{(x+1)-x}{(x+1)^{2/3} + x^{1/3}(x+1)^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)^{2/3} + x^{1/3}(x+1)^{1/3} + x^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}}{x^{2/3} + x^{1/3}\cdot x^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Come insegna la teoria, per calcolare un integrale improprio conviene procurarsi l'integrale indefinito. Poiché $\sin x = \frac{d}{dx}(1-\cos x)$, procediamo per sostituzione: $t = 1 - \cos x$, $dt = \sin x\, dx$, e

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{2/3}} dx = \int \frac{dt}{t^{2/3}} = 3t^{1/3} + C = 3(1-\cos x)^{1/3} + C.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{2/3}} dx &= \lim_{\epsilon\to 0+} \left[3(1-\cos x)^{1/3}\right]_{x=\epsilon}^{x=\pi/2} \\
&= 3 - 3(1-\cos\epsilon)^{1/3} = 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. In questo esercizio, conviene studiare la funzione priva del segno di valore assoluto, e quindi riflettere le parti del grafico sotto l'asse delle ascisse al di sopra. Affrontiamo quindi lo studio della funzione ausiliaria

$$\tilde{f}(x) = \frac{1-3x}{x^2-1}.$$

Il denominatore deve essere diverso da zero, dunque escludiamo $x = -1$ e $x = 1$ dal dominio: $\tilde{f}\colon (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty) \to \mathbb{R}$. I limiti agli estremi valgono

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to-\infty} \tilde{f}(x) = 0, \lim_{x\to-1-} \tilde{f}(x) = +\infty \\
\lim_{x\to-1+} \tilde{f}(x) = -\infty, \lim_{x\to 1-} \tilde{f}(x) = +\infty \\
\lim_{x\to 1+} \tilde{f}(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = 0.
\end{gathered}$$

La funzione $\tilde{f}$ è continua e derivabile nel suo dominio di definizione, e possiede l'asintoto orizzontale bilatero $y = 0$ e gli asintoti verticali $x = -1$ e $x = 1$.

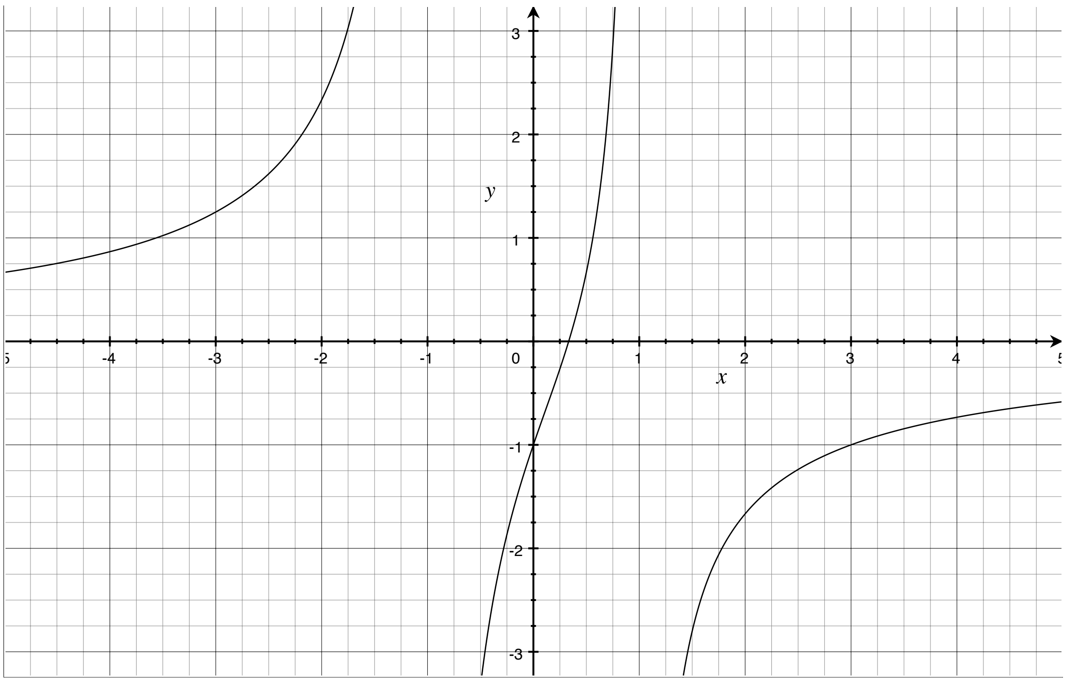

Figura 1: Grafico della funzione $\tilde{f}$.

In vista del successivo passaggio da $\tilde{f}$ a f, studiamo il segno di $\tilde{f}$. Il numeratore è positivo per $x < 1/3$, il denominatore è positivo per $x < -1$ o $x > 1$. La regola dei segni permette di concludere che $\tilde{f}$ è positiva per $x < -1$ o $1/3 < x < 1$, e negativa altrove. Si annulla solo per $x = 1/3$.

La derivata prima vale

$$\frac{d}{dx}\frac{1-3x}{x^2-1} = \frac{3x^2-2x+3}{(x^2-1)^2}.$$

Il discriminante del polinomio a numeratore è negativo, quindi il numeratore ha lo stesso segno del coefficiente di x^2, cioè positivo. Poiché anche il denominatore è palesemente positivo (è un quadrato), la funzione $\tilde{f}$ risulta strettamente crescente in ciascun intervallo contenuto nel dominio di definizione. Attenzione: è **falso** che $\tilde{f}$ sia una funzione strettamente crescente, e questo accade per "colpa" degli asintoti verticali.

Volendo, è facile calcolare anche la derivata seconda di $\tilde{f}$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1-3x}{x^2-1} = \frac{-6x^3+6x^2-18x+2}{(x^2-1)^3}.$$

Purtroppo però non è affatto semplice trovare gli zeri del numeratore, e quindi non possiamo identificare con precisione gli eventuali flessi. Tuttavia abbiamo gli elementi per tracciare un grafico qualitativo di $\tilde{f}$, rappresentato in Figura 1.

A questo punto, il grafico di f si ottiene "ribaltando" rispetto all'asse delle ascisse quei tratti del grafico di $\tilde{f}$ che risultano sotto di esso. Il risultato è mostrato in Figura 2. Notiamo in particolare che nel punto di ascissa $x = 1/3$ la funzione f non è derivabile, essendo diverse le derivate sinistra e destra.

Esercizio 4. Prestiamo molta attenzione al dominio di definizione della funzione proposta: non ha alcun senso indagarne la continuità nel punto $x = -2$, dove f non è nemmeno definita. Nel punto $x = -1$, la funzione assume per definizione il valore $f(-1) = -3c + k$, che ovviamente coincide anche con $\lim_{x \to -1+} f(x)$. Nel punto $x = 2$, abbiamo $f(2) = 6 - 2k$, mentre

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} 3cx + k = 6c + k,$$

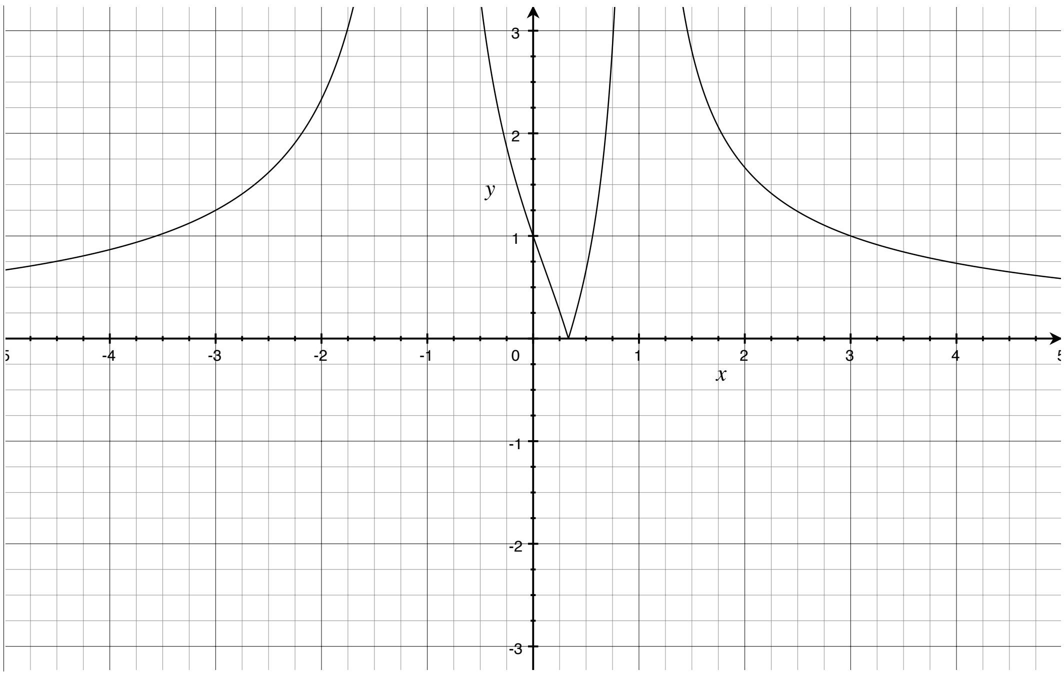

Figura 2: Grafico della funzione f.

e

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 3x - 2k = 6 - 2k.$$

Dobbiamo allora imporre che

$$6 - 2k = 6c + k = 6 - 2k.$$

L'unica condizione per la continuità in $x = 2$ è $6-2k = 6c+k$, ovvero $6c+3k = 6$, o $2c+k = 2$. In ogni altro punto del dominio di definizione, la funzione risulta continua per le regole elementari di continuità.

In conclusione, ci sono infinite scelte dei parametri c e k che rendono continua la funzione: tutte quelle tali che $2c + k = 2$.