Soluzioni

12 giugno 2013

Esercizio 1. Procediamo come segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2 - \log(x^2)}{1+\log x - (\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2 - 2\log x}{1+\log x - (\log x)^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2 \left(1 - 2\frac{\log x}{(\log x)^2}\right)}{(\log x)^2 \left(\frac{1}{(\log x)^2} + \frac{1}{\log x} - 1\right)} = -1.$$

Esercizio 2. Per brevità, poniamo $g(x) = 8x - x^2 - 14$, in maniera tale che $f(x) = e^{g(x)}$. La funzione f è definita per ogni x reale, ed è manifestamente continua e derivabile un numero infinito di volte. Ricordando che la funzione esponenziale è strettamente crescente, possiamo concludere che f è monotona crescente negli intervalli ove g è monotona crescente, ed è monotona crescente negli intervalli ove g è monotona decrescente. Inoltre, i limiti di f sono calcolabili a partire dai limiti di g. Quindi conviene studiare preliminarmente l'andamento della funzione g. Questa è l'equazione di una parabola di vertice $V = (4; 2)$ che volge la concavità verso il basso. Inoltre interseca l'asse delle ascisse nei punti $(4-\sqrt{2}, 0)$ e $(4+\sqrt{2}, 0)$. Riportiamo il grafico di g nella Figura 1.

A questo punto, è molto facile dedurre l'andamento della funzione f da quello della funzione g: per $x \to -\infty$, la funzione f tende a zero ($e^{-\infty} = 0$), cresce monotonamente fino al punto $(4, e^2)$, e decresce monotonamente a zero per $x \to +\infty$. In particolare, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale bilatero, e il punto $(4, e^2)$ è l'unico punto di massimo assoluto di f. Non esistono altri punti critici, ma tentando di tracciare il grafico di f utilizzando queste informazioni è naturale congetturare la presenza di due punti di flesso. Con qualche sforzo, è possibile calcolare la derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = e^{8x-x^2-14} \left(4x^2 - 32x + 62\right).$$

Quindi ci sono due punti di flesso, di ascisse

$$\frac{8-\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{8+\sqrt{2}}{2}.$$

L'andamento qualitativo della funzione f appare in Figura 2.

Esercizio 3. Ricordiamo la formula per trovare la soluzione generale dell'equazione $y' + a(x)y = b(x)$:

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx,$$

dove $A'(x) = a(x)$. Nel nostro caso, $a(x) = 1/x$, sicché $A(x) = \log|x|$. Occorre trattare separatamente il caso $x < 0$ e quello $x > 0$. Per $x < 0$, $A(x) = \log(-x)$, e dunque

$$y(x) = \frac{1}{-x} \int -x \cdot 3x\, dx = \frac{1}{x} \int 3x^2\, dx = \frac{1}{x}\left(x^3 + C_1\right) = x^2 + \frac{C_1}{x}.$$

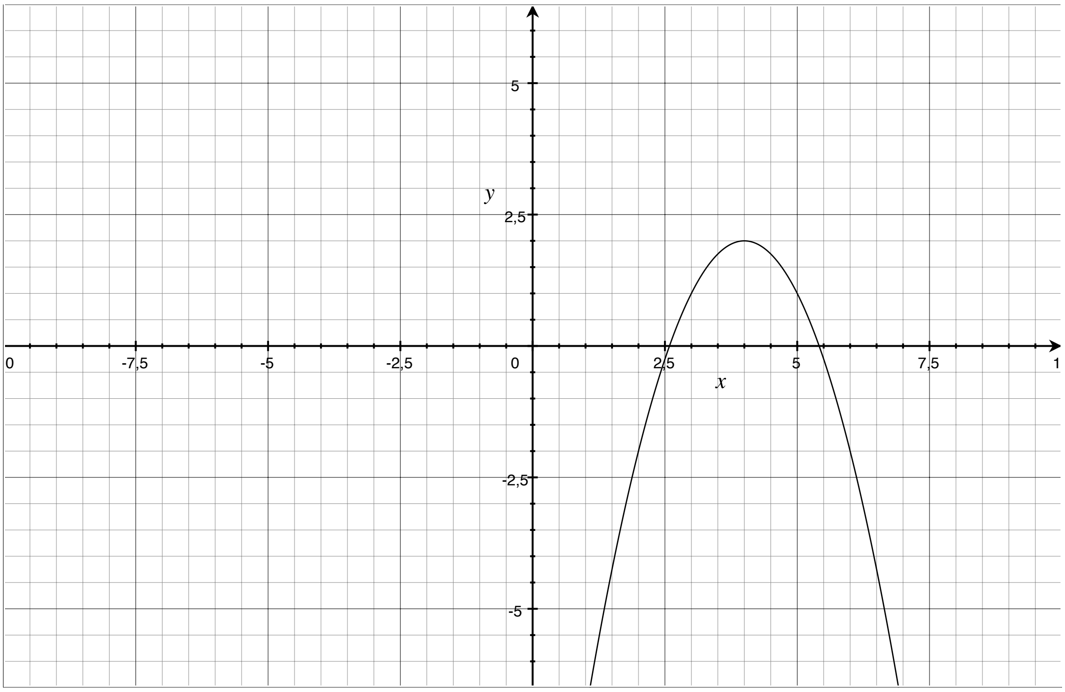

Figura 1: Grafico della funzione g.

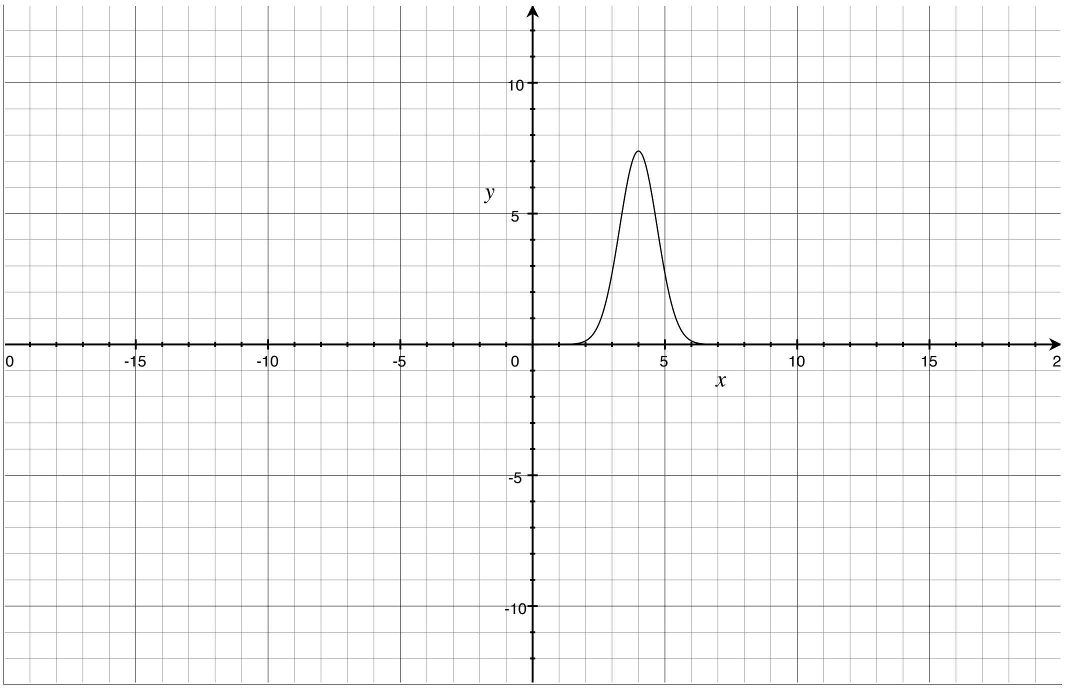

Figura 2: Grafico della funzione f.

Per $x > 0$, $A(x) = \log x$ e

$$y(x) = \frac{1}{x} \int x \cdot 3x \, dx = \frac{1}{x} \int 3x^2 \, dx = \frac{1}{x} \left(x^3 + C_2 \right) = x^2 + \frac{C_2}{x}.$$

Formalmente, possiamo unire le due famiglie di soluzioni:

$$y(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{C}{x}, \quad x \neq 0.$$

Esercizio 4. L'integrale si risolve due volte per parti. Procuriamoci prima di tutto una funzione primitiva:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)e^x \, dx = (x^2 - 1)e^x - 2 \int xe^x \, dx &= (x^2 - 1)e^x - 2 \left(xe^x - \int e^x \, dx \right) \\ &= (x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

Per il teorema di Torricelli,

$$\int_0^1 (x^2 - 1)e^x \, dx = \Big[(x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x \Big]_{x=0}^{x=1} = -1.$$