Soluzioni

10 luglio 2013

Esercizio 1. Il limite può essere calcolato riconducendolo alla definizione del numero di Nepero e:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^3+2}\right)^{x^3} &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+4}{y+2}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y+2}\right)^{y} \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y+2}\right)^{y+2}\left(1+\frac{2}{y+2}\right)^{-2} \\ &= e^2\cdot 1 = e^2.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Per determinare il dominio naturale di definizione, dobbiamo individuare gli zeri del denominatore. Poiché $x^3+1=0$ se e solo se $x=-1$, il dominio naturale è l'insieme $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. I limiti agli estremi valgono

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) \\ &\lim_{x\to-1+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ &\lim_{x\to-1-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty.\end{aligned}$$

In particolare la rette $x=-1$ e $y=1$ sono gli unici asintoti della funzione.

La funzione è continua e derivabile (infinite volte) nel suo dominio di definizione, essendo espressa da un quoziente di funzioni derivabili. Può essere utile osservare che $f(x)\geq 0$ se e solo se $x<-1$ oppure $x\geq 1$. Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned}Df(x) &= \frac{3x^2(x^3+1)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^5+3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.\end{aligned}$$

In particolare, la funzione è strettamente crescente in tutto il dominio di definizione. Il punto $(0,-1)$, dove la retta tangente è orizzontale, può solo essere un punto di flesso. Questa conclusione è confermata anche dal calcolo esplicito della derivata seconda:

$$D^2f(x) = \frac{12x-24x^4}{(1+x^3)^3}.$$

Dallo studio di questa espressione, emerge un secondo punto di flesso, di ascissa $1/\sqrt[3]{2}$.

Il grafico della funzione ̀riportato nella Figura 1.

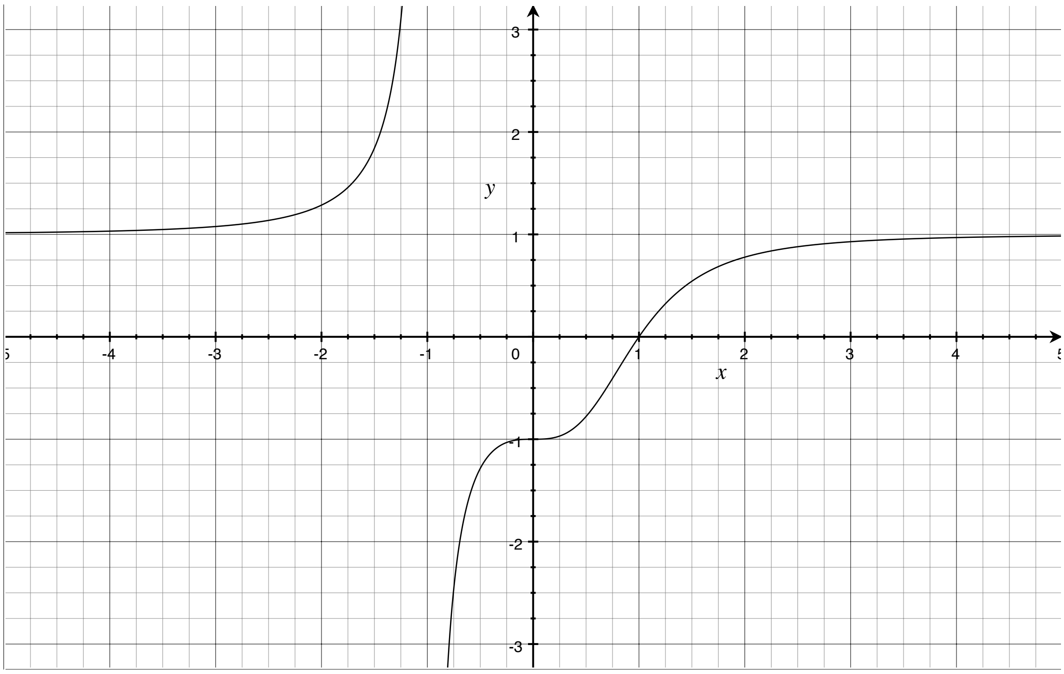

Figura 1: Grafico della funzione f, primo esercizio.

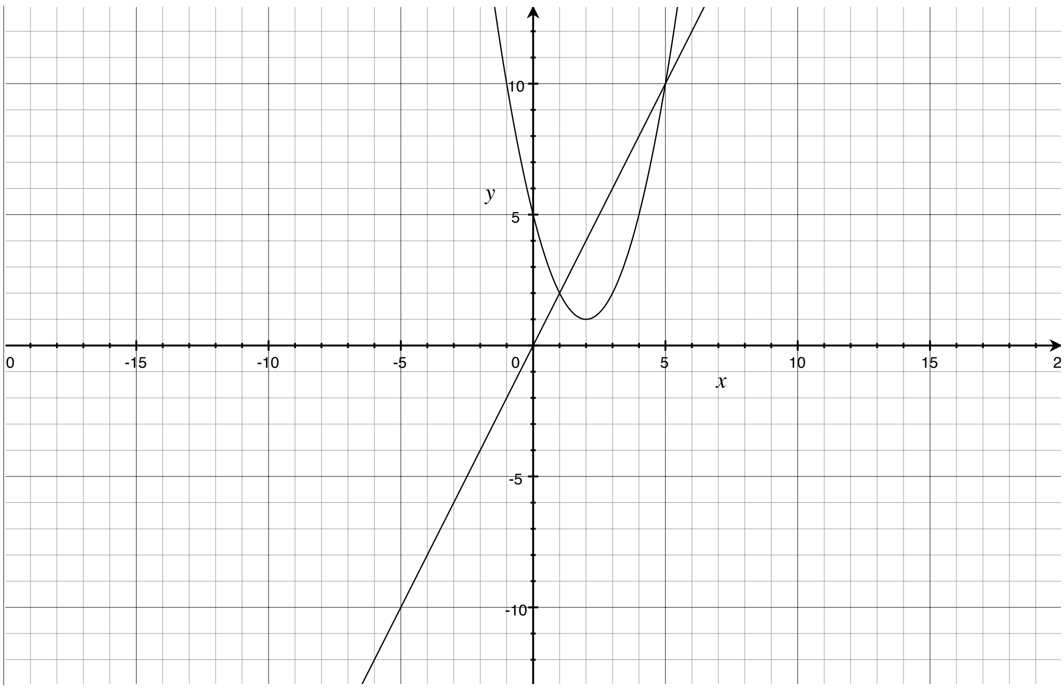

Figura 2: Grafico delle funzioni y_1 e y_2.

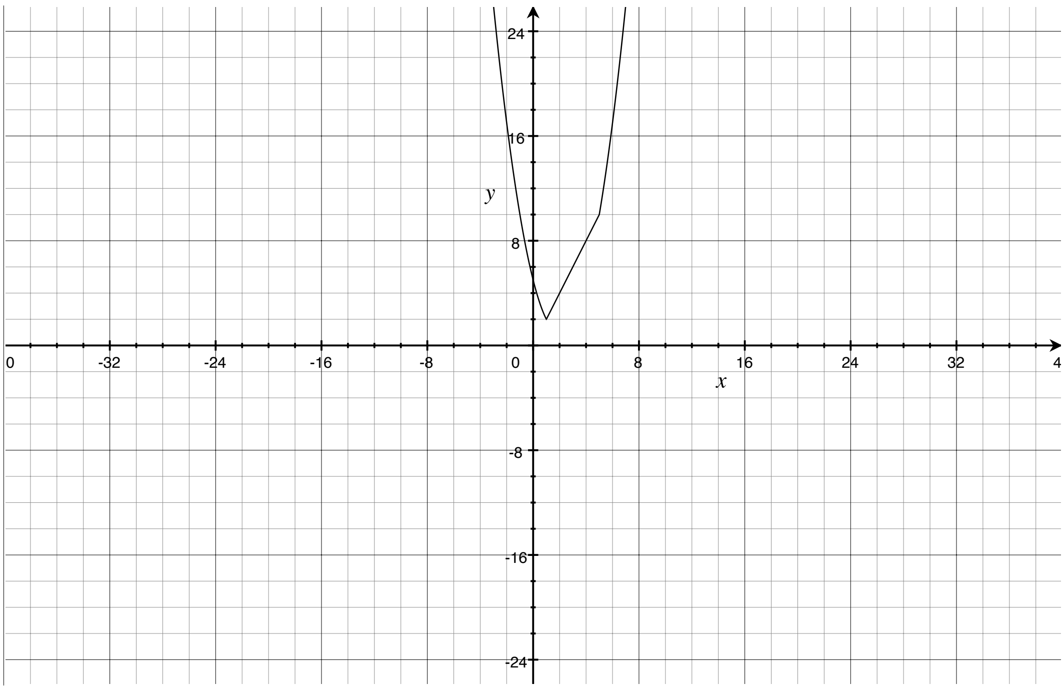

Figura 3: Grafico della funzione f, terzo esercizio.

Esercizio 3. Dobbiamo tracciare il grafico della funzione che calcola, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il valore massimo fra $x^2 - 4x + 5$ e $2x$. Il modo più veloce è quello di sovrapporre i grafici cartesiani delle funzione $y_1 = x^2 - 4x + 5$ e $y_2 = 2x$, e selezionare sempre l'arco più alto.

A questo punto, è facile tracciare il grafico della funzione f, che è riportato nella prossima figura.

Esercizio 4. Osservando che
$$\frac{d}{dx}\left(x^4 - 1\right) = 4x^3,$$
effettuiamo il cambiamento di variabile $t = x^4 - 1$. Quindi
$$\int x^3 \sqrt[3]{x^4 - 1}\, dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \sqrt[3]{x^4 - 1}\, dx = \frac{1}{4} \int \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{3}{16} \left(x^4 - 1\right)^{4/3} + C.$$
Usando il teorema di Torricelli,
$$\int_1^2 x^3 \sqrt[3]{x^4 - 1}\, dx = \frac{45}{16} \times \sqrt[3]{15}.$$