Soluzioni degli esercizi del 15 febbraio 2012

Esercizio 1. Questo esercizio, nonostante le apparenze, è quasi banale. L'unica vera difficoltà è la determinazione del dominio di definizione. La funzione sotto il segno di integrale, per ogni x fissato,

$$t \mapsto \frac{1-tx}{t},$$

è una funzione definita per ogni $t \neq 0$, ed è continua per tali valori. Se $x > 0$, la funzione f è l'integrale di una funzione continua, e dunque non ci sono problemi.

Da questo momento, lo studio della funzione è molto elementare. Infatti, per ogni $x > 0$,

$$f(x) = [\log t]_1^x - x\,[1]_1^x = \log x - x(x-1) = \log x - x^2 + x.$$

In particolare,

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty,$$

e la retta $x = 0$ è l'unico asintoto verticale. La funzione non possiede altri asintoti. La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1+x-2x^2}{x}.$$

Il polinomio $1 + x - 2x^2$ ha due radici reali $x_1 = -1/2$ (non accettabile) e $x_2 = 1$. La derivata è dunque positiva per $0 < x < 1$ e negativa per $x > 1$. In $x = x_2 = 1$ la funzione possiede un punto di massimo, con valore $f(1) = 0$. Il calcolo della derivata seconda è immediato, e il risultato è

$$f''(x) = -2 - \frac{1}{x^2}.$$

Quindi la funzione è ovunque concava. Il grafico qualitativo è in figura.

Se invece $x \leq 0$, possiamo scrivere

$$f(x) = -\int_x^1 \frac{1-tx}{t}\,dt = -\int_x^0 \frac{1-tx}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{1-tx}{t}\,dt.$$

I due integrali impropri a secondo membro sono divergenti: ad esempio,

$$\int_0^1 \frac{1-tx}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t} - \int_0^1 x\,dt,$$

e sappiamo che $\int_0^1 (1/t)\,dt = +\infty$. Quindi la funzione f non è definita quando $x \leq 0$. Concludiamo che la funzione f non può essere definita su un insieme più grande di $(0, +\infty)$.

Esercizio 2. La funzione $f_{\alpha\beta}$ è costruita incollando due funzioni derivabili in $x = 0$. Sappiamo che la regolarità di $f_{\alpha\beta}$ è garantita ovunque, tranne eventualmente nel punto di incollamento. Poiché

$$f_{\alpha\beta}(0) = \beta^2 - 2$$

e

$$\lim_{x \to 0+} \alpha \sin x = 0,$$

la condizione per la continuità in $x = 0$ è

$$\beta^2 = 2,$$

cioè $\beta = \pm 2$. Quindi la nostra funzione è continua se e solo se $\beta = 2$ oppure $\beta = -2$. Per quanto riguarda la derivata, osserviamo che

$$D^- f_{\alpha\beta}(0) = 2(x-\beta)|_{x=0} = -2\beta.$$

Invece

$$D^+ f_{\alpha\beta}(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{\alpha \sin h}{h} = \alpha.$$

Quindi occorre imporre che

$$\begin{cases} \beta^2 = 2 \\ \alpha = -2\beta. \end{cases}$$

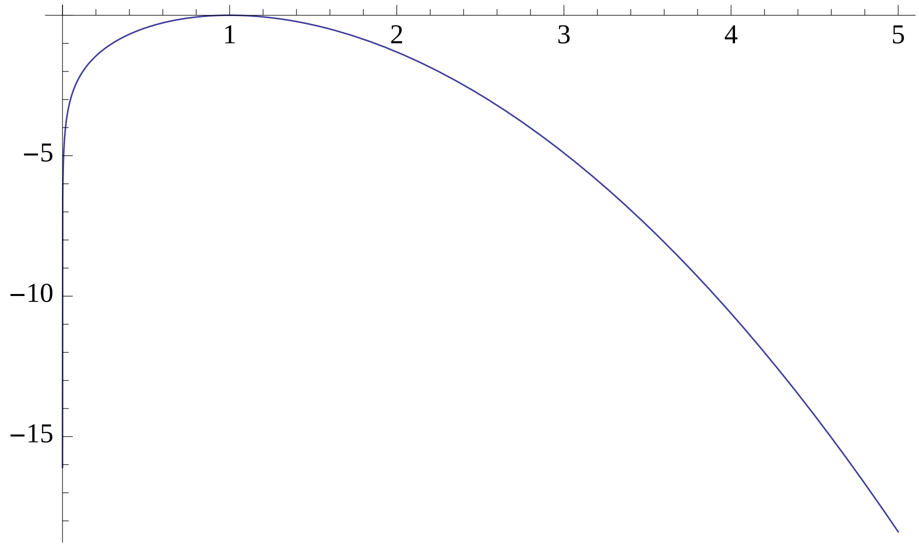

FIGURA 1. Grafico della funzione f

Ricapitolando, la funzione è derivabile se e solo se $\beta = \sqrt{2}$ e $\alpha = -2\sqrt{2}$, oppure $\beta = -\sqrt{2}$ e $\alpha = 2\sqrt{2}$.

Esercizio 3. Essendo una forma indeterminata del tipo $[+\infty^0]$, ci conviene studiare il logaritmo della funzione nel limite. Analizziamo dunque

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x \log(\tan x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x (\log(\sin x) - \log(\cos x))$$

Poiché $\log(\sin \frac{\pi}{2}) = 0$, ci basta calcolare

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x \log(\cos x) = \lim_{t \to 0+} t \log t = 0.$$

Ricapitolando,

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x \log(\tan x) = 0,$$

e dunque

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\tan x)^{\cos x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Esercizio 4. L'equazione differenziale è un caso particolare di equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. La formula risolutiva porge

$$y(x) = C\mathrm{e}^{x + \frac{x^2}{2}},$$

dove C è una costante reale arbitraria. Quando $x \to +\infty$, ovviamente $y(x)$ tende a $+\infty$ se $C > 0$, a $-\infty$ se $C < 0$, e a 0 se $C = 0$.