Soluzioni degli esercizi del 5 settembre 2012

Esercizio 1. Poiché il denominatore tende a zero e la frazione tende al valore finito $\sqrt{3}$, necessariamente anche il numeratore deve tendere a zero. Quindi
$$\sqrt{\beta} = \sqrt{3},$$
cioè $\beta = 3$. Ci siamo ricondotti a scegliere i valori di α tali che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\alpha x+3}-\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}.$$
Osserviamo che
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\alpha x+3}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\alpha x+3}-\sqrt{3}}{x}\frac{\sqrt{\alpha x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha x+3}+\sqrt{3}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x+3-3}{x\left(\sqrt{\alpha x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x\left(\sqrt{\alpha x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha x+3}+\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$
Pertanto α deve risolvere l'equazione
$$\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$
cioè $\alpha = 6$. Ricapitolando, $\alpha = 6$ e $\beta = 3$.

Esercizio 2. Il dominio di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Poiché
$$\lim_{x\to -1-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty,$$
la retta $x = -1$ è l'unico asintoto verticale. La funzione f è continua e derivabile in tutti i punti del dominio di definizione, essendo un quoziente di funzioni derivabili.

Per la gerarchia degli infinitesimi,
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0,$$
sicché $y = 0$ è l'asintoto orizzontale bilatero. Questo ovviamente esclude la presenza di asintoti obliqui.

Il numeratore di f è sempre strettamente positivo, mentre il denominatore cambia segno passando attraverso il punto di ascissa -1. Concludiamo facilmente che $f(x) \geq 0$ se $x > -1$, mentre $f(x) < 0$ se $x < -1$.

Passando alla derivata, le solite regole porgono l'espressione
$$Df(x) = -\frac{2e^{1-x^2}x}{x+1} - \frac{e^{1-x^2}}{(x+1)^2} = -\frac{e^{1-x^2}\left(2x^2+2x+1\right)}{(x+1)^2}.$$
Dato che il discriminante del polinomio di secondo grado $2x^2+2x+1$ vale $\Delta = 4-8 = -4 < 0$, la derivata è sempre negativa, e la funzione è sempre strettamente decrescente in ciascuno intervallo $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$.

È anche possibile studiare la derivata seconda
$$D^2 f(x) = \frac{2e^{1-x^2}x^2\left(2x^2+4x+3\right)}{(x+1)^3}.$$
Il numeratore è sempre maggiore o uguale a zero, mentre il denominatore cambia segno in $x = -1$. La funzione è concava per $x < -1$ e convessa per $x > -1$.

Abbiamo tutti gli ingredienti per tracciare un grafico qualitativo, che riportiamo in figura.

Esercizio 3. Nel limite proposto si riconosce facilmente una forma indeterminata del tipo $[0/0]$. Prima di procedere, conviene osservare che il fattore e^{x+x^3} a denominatore non contribuisce all'indeterminazione, e ci conviene isolarlo. Per questa ragione, calcoliamo il limite più semplice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-\cos(4x)+1-3x-8x^2}{x^3} \tag{1}$$

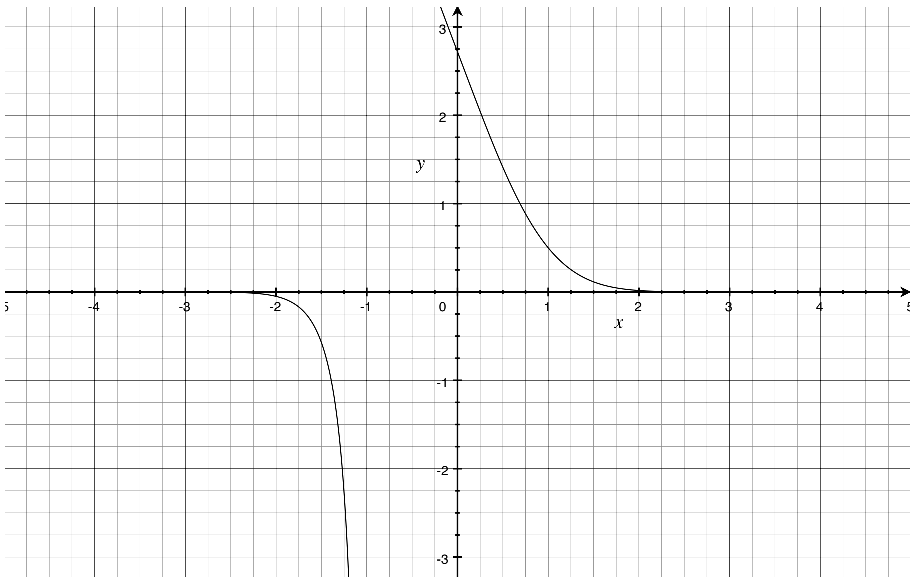

FIGURA 1. Grafico della funzione f.

Applichiamo la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - \cos(4x) + 1 - 3x - 8x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-16x + 4\sin(4x) + 3\cos(3x) - 3}{3x^2},$$

che però è ancora una forma indeterminata. Applicando una seconda volta la regola di De l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - \cos(4x) + 1 - 3x - 8x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\sin(3x) + 16\cos(4x) - 16}{6x},$$

e anche questa volta non abbiamo rimosso l'indeterminazione. Dobbiamo derivare un'ultima volta, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - \cos(4x) + 1 - 3x - 8x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-64\sin(4x) - 27\cos(3x)}{6} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}.$$

Quindi il limite (1) vale $-9/2$. Osservando che $\lim_{x\to 0} e^{x+x^3} = e^0 = 1$, concludiamo che anche il limite di partenza vale $-9/2$.

Esercizio 4. L'integrale presenta un valore assoluto. In questi casi, occorre togliere il segno di valore assoluto, studiando il segno della quantit al suo interno. Per definizione,

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 - x^2 < 0. \end{cases}$$

Inoltre possiamo limitarci ai valori di x compresi fra 0 e 2, perché questi sono i valori coinvolti nell'integrale definito. In questo *range*, la condizione $1 - x^2 \geq 0$ è equivalente a $0 \leq x \leq 1$. Pertanto

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Possiamo ora spezzare l'integrale:

$$\int_0^2 |1 - x^2|\, dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=1}^{x=2}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 1 + 2 - 2 + 1 = 2.$$