Soluzioni degli esercizi del 25 gennaio 2012

Esercizio 1. L'integrale si calcola facilmente per sostituzione, ponendo $t = x^2 - 1$ e osservando che $dt/dx = 2x$. Quindi

$$\int x e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + C.$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} x e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}e^{1-1} - \left(\frac{1}{2}e^{1-1}\right) = 0.$$

Sopresa? No, poiché la funzione $x \mapsto x e^{x^2-1}$ è *dispari* e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a $x = 0$.

Esercizio 2. La funzione è ottenuta *incollando* due funzioni nel punto $x = 0$. Poiché entrambe sono continue e derivabili, dobbiamo solo decidere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'incollamento sia continuo e derivabile nel punto $x = 0$. Cominciamo (ovviamente) dalla continuità. Il valore della funzione in $x = 0$ è 0, e pertanto occorre e basta che il limite per $x \to 0$ coincida con 0. Ora,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1-\cos x}{x^2} x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Poiché $\lim_{x\to 0+} \alpha x = 0$, concludiamo che la funzione è continua per qualunque valore di α.

Passiamo alla derivabilità. Usando la definizione di derivata

$$Df(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x},$$

ci accorgiamo che questo limite si spezza in

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

Pertanto, affinché $Df(0)$ esista, è necessario e sufficiente che $\alpha = 1/2$.

Esercizio 3. La prima informazione essenziale è il dominio della funzione. Dobbiamo imporre che $x \neq 0$ e che

$$\left|\frac{x^2-9}{x}\right| \neq 0.$$

La funzione è pertanto definita nel dominio

$$\mathcal{D} = (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,3) \cup (3,+\infty).$$

Può essere utile esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \log \frac{x^2-9}{x} & \text{se } x \in (-3,0) \cup (3,+\infty) \\ \log \frac{9-x^2}{x} & \text{se } x \in (-\infty,-3) \cup (0,3). \end{cases} \tag{1}$$

Può essere comodo cercare gli zeri della funzione, ovvero i punti $x \in \mathcal{D}$ tali che $f(x) = 0$. Per le proprietà del logaritmo, ci basta risolvere l'equazione

$$\left|\frac{x^2-9}{x}\right| = 1,$$

che si spezza nelle due equazioni

$$\frac{x^2-9}{x} = 1, \quad \frac{x^2-9}{x} = -1.$$

Le soluzioni di queste equazioni algebriche di secondo grado sono quattro:

$$\frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

I limiti della funzione agli estremi del dominio valgono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-3-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to-3+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to0-} f(x) = +\infty, \lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to3-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to3+} f(x) = -\infty.$$

Non possono esistere asintoti obliqui, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x|}{x} = 0.$$

La funzione f è continua e derivabile in $\mathcal{D}$. La derivata deve essere calcolata mediante la definizione (1).

$$\frac{d}{dx} \log \frac{x^2-9}{x} = \frac{x}{x^2-9}\frac{x^2+9}{x^2} = \frac{x^2+9}{x(x^2-9)},$$

oppure

$$\frac{d}{dx} \log \frac{9-x^2}{x} = \frac{x}{9-x^2}\frac{-x^2-9}{x^2} = \frac{x^2+9}{x(x^2-9)}.$$

Come si vede chiaramente, le due formule sono identiche (perché?). Inoltre, entrambe le derivate sono di segno costante: più precisamente, f è monotona crescente nella regione $(-3,0)\cup(3,+\infty)$ e decrescente nella regione $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

Un grafico qualitativo della funzione f appare nella figura allegata.

Esercizio 4. Per gli studenti che hanno imparato ad usare gli sviluppi di Taylor, basta ricordare che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4), \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

e sostituire nel numeratore, ottenendo che

$$\lim_{x\to0} \frac{2-2\cos x - x^2 + x - \sin x - \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Per gli studenti che non conoscono, o non vogliono usare gli sviluppi di Taylor, l'unica via è quella di applicare ripetutamente il teorema di De l'Hospital, fino a far scomparire la forma indeterminata.

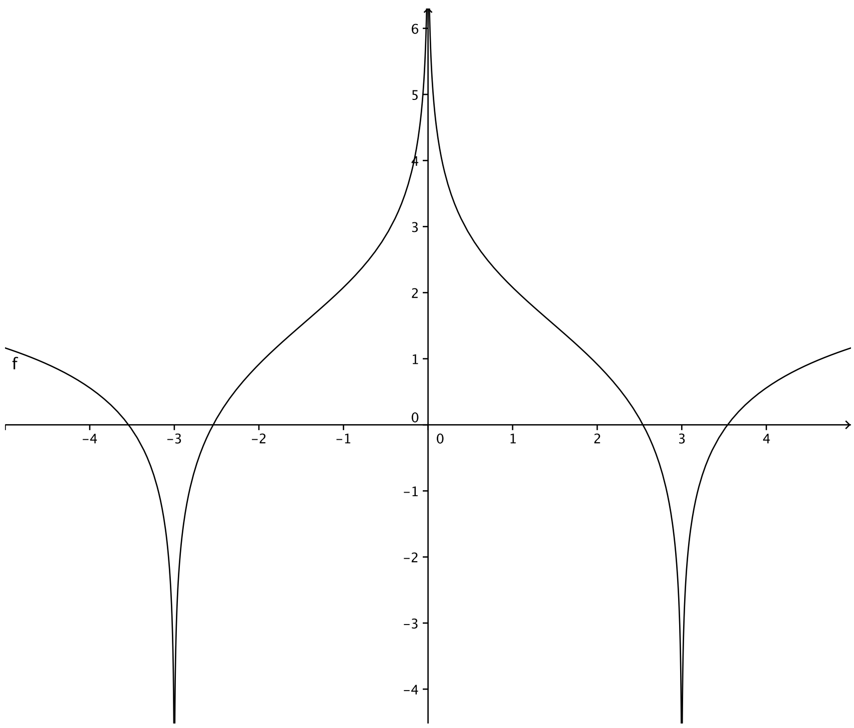

FIGURA 1. Grafico della funzione f