Soluzioni degli esercizi del 16 aprile 2012

Esercizio 1. Vediamo di rispondere ai vari quesiti dell'esercizio.

(1) L'unica funzione "problematica" è il logaritmo, e dobbiamo imporre che il suo argomento sia *strettamente* positivo. Quindi $|e^x - 1| > 0$. Ma il valore assoluto di una quantità è strettamente positivo se e solo se tale quantità è diversa da zero. Dunque la nostra condizione si riduce a $e^x - 1 \neq 0$, cioè $x \neq 0$. Il dominio naturale della funzione f è pertanto $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(2) Dobbiamo calcolare quattro limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Deduciamo che la retta verticale $x = 0$ è l'unico asintoto, appunto, verticale. La retta $y = 0$ è l'asintoto orizzontale a $-\infty$, mentre occorre investigare l'esistenza di un asintoto obliquo a $+\infty$. In effetti, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\log|e^x - 1| = -\log(e^x - 1) = -\log\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) \\ &= -\log e^x - \log\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = -x + R(x), \end{aligned}$$

dove $R(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Quindi $y = -x$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(3) Per studiare il segno della funzione, ci basta confrontare $|e^x - 1|$ con 1. Questo confronto è particolarmente facile per via grafica. Infatti, il grafico di $y = e^x - 1$ è una traslazione verso il basso del grafico dell'esponenziale. Prendendone il valore assoluto, arriviamo al grafico riportato in figura 1.

Appare evidente che esiste una sola intersezione fra $y = |e^x - 1|$ e $y = 1$, e l'ascissa di tale intersezione è la soluzione dell'equazione $e^x = 2$, cioè $x = \log 2$. Per $x < \log 2$, l'argomento del logaritmo è inferiore a 1, e dunque il logaritmo ha segno negativo. La funzione f è dunque positiva per $x < \log 2$ e negativa per $x > \log 2$.

(4) Lo studio della monotonia richiede il calcolo differenziale.[1] Per questo, conviene rimuovere il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} -\log(e^x - 1) & (x > 0) \\ -\log(1 - e^x) & (x < 0). \end{cases}$$

Ora è molto facile calcolare la derivata prima di f. Ad esempio, per $x > 0$,

$$Df(x) = -\frac{1}{e^x - 1} e^x = -\frac{e^x}{e^x - 1},$$

e similmente, per $x < 0$,

$$Df(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}.$$

Concludiamo che la funzione cresce da $-\infty$ a 0, e decresce da 0 a $+\infty$.

(5) Infine, in figura 2, il grafico di f.

Esercizio 2. Il limite proposto è una forma indeterminata [0/0]. Proviamo a cambiare variabile: $z = x - 1$, sicché $z \to 0$. Il limite diventa

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z+1} - e + \sqrt{|z|^3}}{(z+1)^2 \log(z+1)}.$$

[1] Questa affermazione è scorretta: lo studio della monotonia di f è elementare, e non serve calcolare alcuna derivata. Infatti, la funzione $|e^x - 1|$ decresce sulla semiretta $(-\infty, 0)$. Quindi il suo logaritmo decresce, e il segno negativo rende f crescente in tale semiretta. Similmente, f cresce nella semiretta $(0, +\infty)$. Tuttavia, è improbabile che lo studente eviti di calcolare almeno una derivata, e quindi proponiamo anche un'analisi più canonica della monotonia.

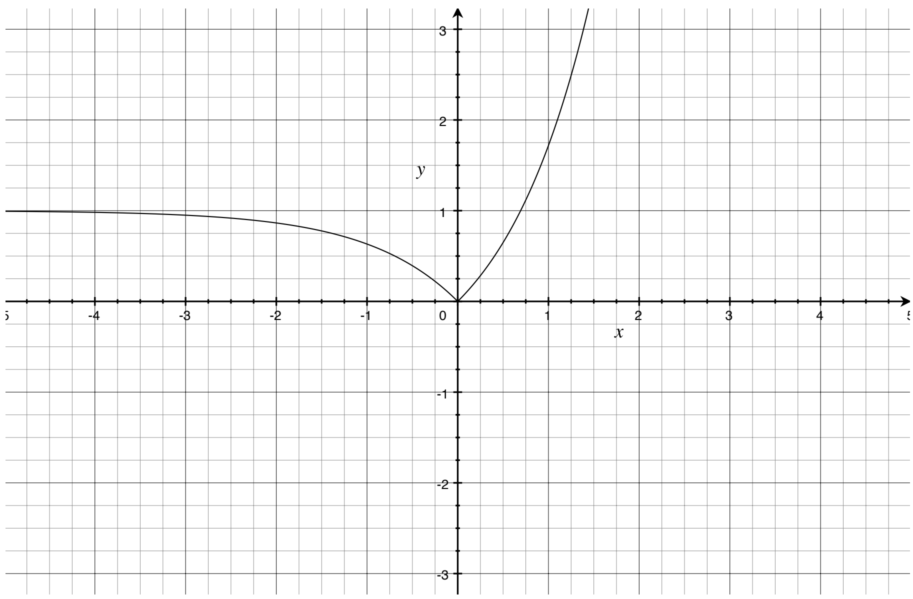

FIGURA 1. Grafico della funzione $y = |e^x - 1|$

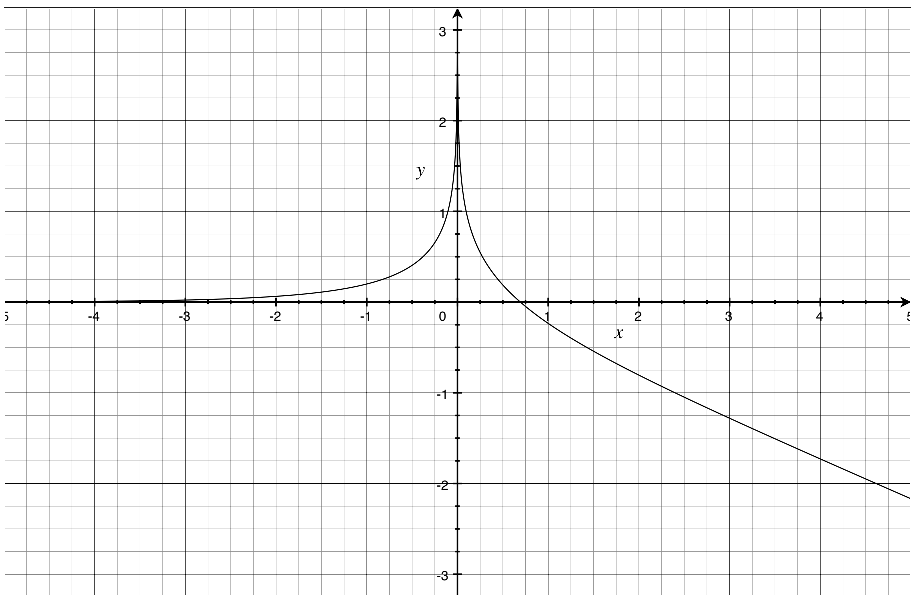

FIGURA 2. Grafico della funzione f

Scriviamo

$$\frac{e^{z+1} - e + \sqrt{|z|^3}}{(z+1)^2 \log(z+1)} = \frac{e\,(e^z - 1) + |z|^{3/2}}{(z+1)^2 \frac{\log(z+1)}{z} \cdot z} = \frac{e\,\frac{e^z-1}{z} \cdot z + |z|^{3/2}}{(z+1)^2 \frac{\log(z+1)}{z} \cdot z} = \frac{e\,\frac{e^z-1}{z} + |z|^{1/2}}{(z+1)^2 \frac{\log(z+1)}{z}} \to e.$$

Esercizio 3. L'integrale proposto contiene un valore assoluto. Per calcolarlo, dobbiamo innanzitutto studiare il segno della funzione integranda. Sappiamo che $\log x > 0$ se e solo se ($x > 0$ e) $x > 1$. Poiché $e^1 < 1$, possiamo spezzare l'intervallo di integrazione:

$$\int_{1/e}^{e} |\log x|\,dx = \int_{1/e}^{1} |\log x|\,dx + \int_{1}^{e} |\log x|\,dx = -\int_{1/e}^{1} \log x\,dx + \int_{1}^{e} \log x\,dx.$$

Ora ci procuriamo una primitiva di $x \mapsto \log x$. Integrando per parti,

$$\int \log x\,dx = \int 1 \cdot \log x\,dx = x \log x - \int \frac{x}{x}\,dx = x \log x - x + C.$$

Per il teorema di Torricelli,

$$\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\log x|\,\mathrm{d}x = -\left[x\log x - x\right]_{x=1/\mathrm{e}}^{x=1} + \left[x\log x - x\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Esercizio 4. (1) Preso $a > 0$, possiamo scrivere

$$\int \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 + a^2 - 2a^2}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2a^2}{x^2 + a^2}\right)\mathrm{d}x = x - 2a^2 \cdot \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$= x - 2a\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Quindi

$$I_a = \left[x - 2a\arctan\frac{x}{a}\right]_{x=-a}^{x=a} = a - 2a\arctan 1 - (-a - 2a\arctan(-1)) = 2a - 4a\frac{\pi}{4} = (2-\pi)a.$$

(2) Dall'ultima formula del punto (1), ricaviamo

$$\lim_{a\to+\infty} I_a = \lim_{a\to+\infty} (2-\pi)a = -\infty.$$