Soluzioni degli esercizi del 15 febbraio 2012

Esercizio 1. La funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}$$
è definita per tutti e soli i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali che
$$x^2 - \frac{8}{x} \geq 0,$$
cioè
$$\frac{x^3 - 8}{x} \geq 0.$$
Il numeratore è positivo per $x > 2$, e nullo per $x = 2$. Il denominatore è positivo per $x > 0$. Quindi la frazione è positiva per $x > 2$ e per $x < 0$, è nulla per $x = 2$, ed è negativa per $0 < x < 2$. Concludiamo che f è naturalmente definita nell'insieme $E = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$. È inoltre una funzione continua, ed è sicuramente derivabile in $(-\infty), 0) \cup (2, +\infty)$. I limiti agli estremi valgono $f(2) = 0$,
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
Controlliamo se esistono asintoti obliqui:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x^3}} = 1.$$
Inoltre
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x\right)}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \frac{8}{x} - x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x} = 0.$$
La retta $y = x$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$. A sinistra,[1]
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x^3 - 8}{x^3}} = -1.$$
Come prima, $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$, e $y = -x$ è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Lo studio del segno di f è banale: una radice quadrata è sempre maggiore o uguale a zero.

Passiamo ora alla derivata prima. Per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,
$$f'(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 f(x)}.$$
In particolare, $\lim_{x \to 2+} f'(x) = +\infty$, e $x = 2$ è un punto a tangente verticale. La derivata prima è negativa in $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$ e positiva altrove. Quindi il punto di ascissa $x = -\sqrt[3]{4}$ è un minimo relativo. Non si tratta però di un minomo assoluto, poiché $f(-\sqrt[3]{4}) > 0$.

Volendo, si può calcolare la derivata seconda:
$$f''(x) = -\frac{24\left(x^3 - 2\right)}{x^4 \left(\frac{x^3 - 8}{x}\right)^{3/2}},$$
che è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 2$. Dunque f è una funzione convessa in $(-\infty, 0)$ e concava in $(2, +\infty)$. Di seguito è riportato il grafico qualitativo della nostra funzione.

[1] $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$.

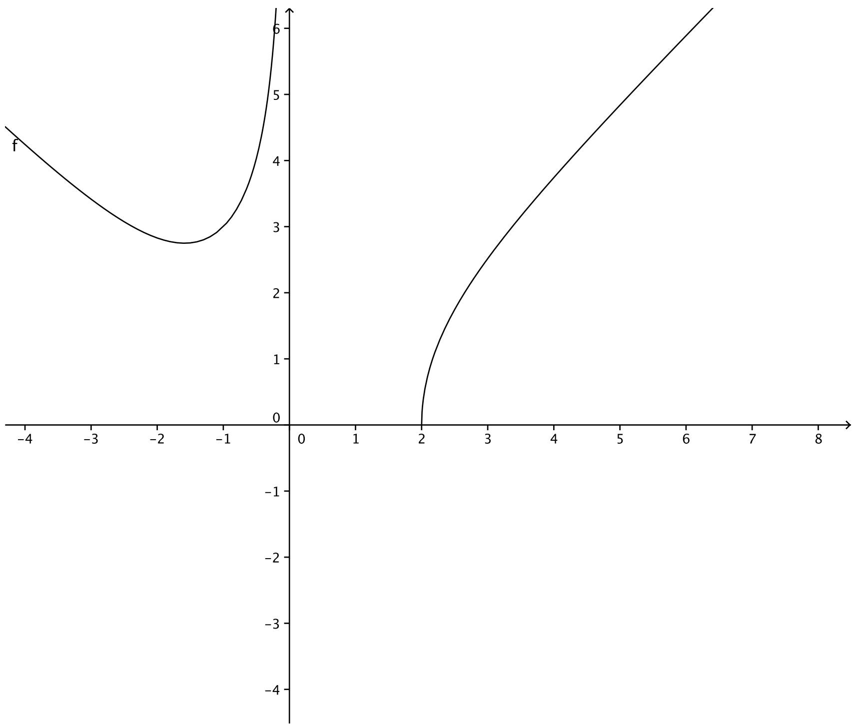

Figura 1. Grafico della funzione f

Esercizio 2. Ricordiamo l'identità

$$\log \sqrt{z} = \frac{1}{2} \log z,$$

valida per ogni $z > 0$. Inoltre, ricordiamo i limiti notevoli

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1, \quad \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

Il limite proposto vale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \sqrt{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} x^2}{\frac{1-\cos x}{x^2} x^2} = 1.$$

Esercizio 3. Trattandosi dell'integrale di una funzione razionale fratta, dobbiamo seguire lo schema generale di risoluzione. Ovviamente, partiamo dal calcolo di una primitiva dell'integranda. Il polinomio a denominatore è chiaramente privo di radici reali (è la somma di un termine non negativo e di una costante positiva). Sappiamo che, in questi casi, bisogna ricondurre il denominatore alla somma di due quadrati. Poiché

$$3x^2 + 2 = 2 \left(\frac{3}{2} x^2 + 1 \right),$$

possiamo effettuare il cambiamento di variabile

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x = t, \quad dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\,dt,$$

e ricondurre l'integrale indefinito a

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

Applichiamo adesso il teorema fondamentale del calcolo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x^2+2} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La parità della funzione integranda avrebbe potuto suggerire fin dall'inizio che

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x^2+2} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2+2},$$

ma naturalmente questa osservazione non semplifica veramente la risoluzione dell'esercizio.

Esercizio 4. L'esercizio chiede di calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^{\mathrm{e}}}.$$

Usando le proprietà elementari delle potenze, possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^{\mathrm{e}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\mathrm{e}}.$$

Ora, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi} = \pi^0 = 1$; resta da calcolare il limite di $n^{\frac{1}{n}}$. Essendo una forma indeterminata del tipo $[\infty^0]$, usiamo il trucco standard del logaritmo e scriviamo

$$n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\log(n^{\frac{1}{n}})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log n} \to \mathrm{e}^0 = 1$$

per $n \to +\infty$. Infatti, $\log n$ è un infinitesimo più lento di n, sicché l'esponente di e tende a zero. Riassumendo tutte queste considerazioni,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^{\mathrm{e}}} = 1.$$