Soluzioni degli esercizi del 13 luglio 2012

Esercizio 1. Affrontiamo i vari punti dell'esercizio.

1) Dobbiamo imporre $x^2 - 9 \neq 0$, cioè $x \neq -3$ e $x \neq 3$. Pertanto il dominio di definizione di f è
$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$
I limiti agli estremi, ricordando la gerarchia degli infiniti e le regole dei segni, valgono
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-3-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-3+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to3-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to3+} f(x) = +\infty.$$
2) La rette $x = -3$ e $x = 3$ sono asintoti verticali. La retta $y = 0$ è l'asintoto orizzontale a $-\infty$. Poiché il numeratore, un a funzione esponenziale, cresce più velocemente di qualunque potenza, non possono esistere asintoti obliqui a $+\infty$.
3) Osserviamo che $e^{x+1} > 0$ ovunque in A. Invece $x^2 - 9 > 0$ se e solo se $x < -3$ o $x > 3$. Pertanto la funzione è positiva in $(-\infty, -3)$ e negativa in $(3, +\infty)$.
4) Calcoliamo la derivata prima:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x+1}(x^2-9) - 2xe^{x+1}}{(x^2-9)^2} \\ &= \frac{(x^2-2x-9)e^{x+1}}{(x^2-9)^2}. \end{aligned}$$
Il segno della derivata prima è il segno del trinomio $x^2 - 2x - 9$, che si annulla per
$$x = 1 \pm \sqrt{10}.$$
Dunque f cresce in $(-\infty, -3)$, in $(-3, 1-\sqrt{10})$, in $(1+\sqrt{10}, +\infty)$; decresce nell'insieme complementare.
5) La derivata seconda richiede un po' di attenzione nei calcoli:
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left[(x^2-2x-9)e^{x+1} + (2x-2)e^{x+1}\right](x^2-9)^2 - 2(x^2-9)\cdot 2x(x^2-2x-9)e^{x+1}}{(x^2-9)^4} \\ &= \frac{(x^2-9)(x^2-2x-9+2x-2) - 4x(x^2-2x-9)}{(x^2-9)^4}(x^2-9)e^{x+1} \\ &= \frac{e^{x+1}\left(x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 36x + 99\right)}{\left(x^2-9\right)^3}. \end{aligned}$$
6) A causa dell'asintoto orizzontale e di quelli verticali, la resa visiva del grafico migliora se lo spezziamo in due parti, che appaiono di seguito.

Esercizio 2. Per calcolare il primo integrale, osserviamo che, per ogni $x > 0$, $\log(x^2) = 2\log x$. Dunque il primo integrale si semplifica:
$$\begin{aligned} \int_1^2 (2\log x - 2\log x + |1-x|)\,dx &= \int_1^2 |1-x|\,dx \\ &= \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Naturalmente abbiamo tolto il valore assoluto, poiché $|1-x| = x-1$ nell'intervallo $[1, 2]$ di integrazione.

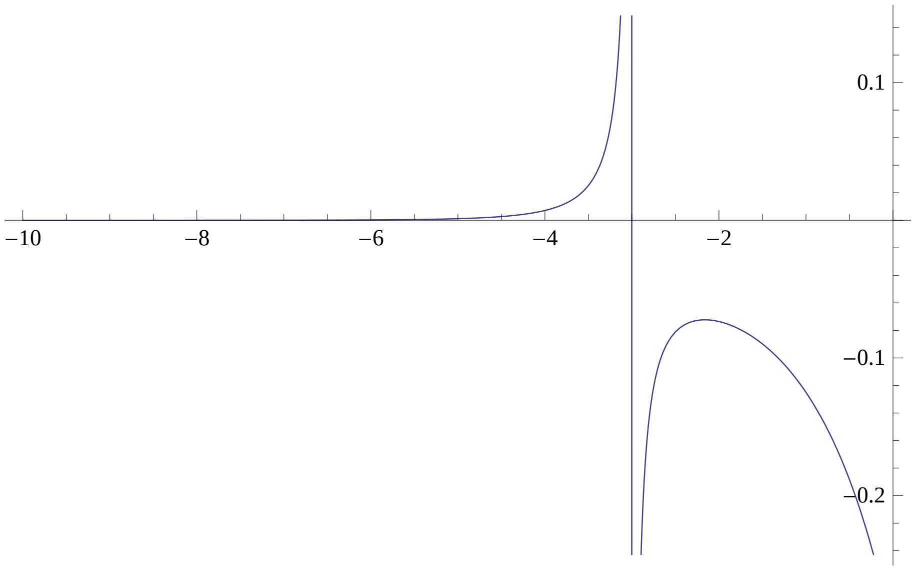

FIGURA 1. Grafico della funzione f per $x \leq 0$

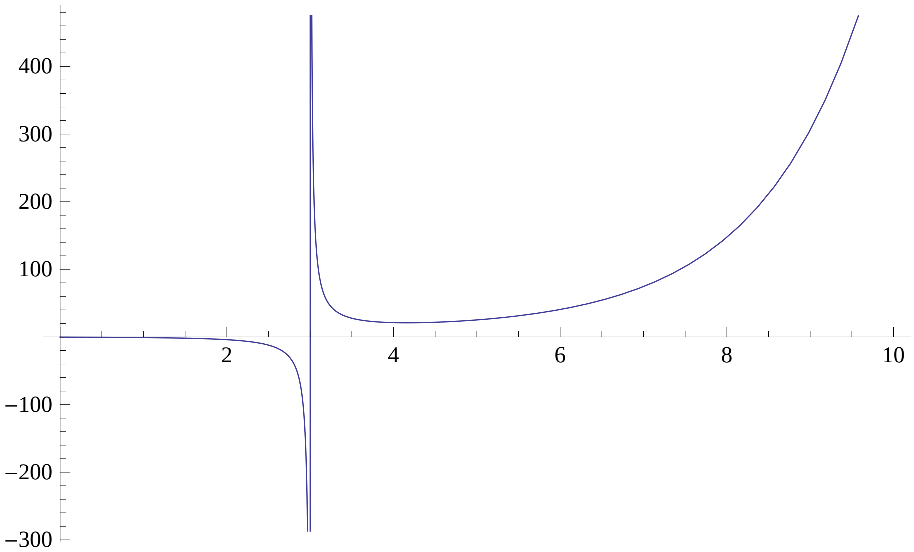

FIGURA 2. Grafico della funzione f per $x \geq 0$

Il secondo integrale è leggermente più complicato. Si può risolvere in due modi diversi: spezzandolo nella somma degli integrali di $\log^2 x$ e di $\log x$, oppure come segue. Poiché

$$\log^2 x - \log x = \log x \, (\log x - 1) \, ,$$

integriamo per parti (deriviamo $\log x - 1$ e integriamo $\log x$):

$$\begin{aligned} \int \left(\log^2 x - \log x\right) dx &= x \left(\log x - 1\right)^2 - \int \left(\log x - 1\right) dx \\ &= x \left(\log x - 1\right)^2 - x \left(\log x - 1\right) + x + C \\ &= x \left(\log x - 1\right)^2 - x \log x + 2x + C. \end{aligned}$$

Usando il teorema di Torricelli,

$$\int_1^2 \left(\log^2 x - \log x\right) dx = 2 \left(\log 2 - 1\right)^2 - 2 \log 2 + 1.$$

Esercizio 3. Conviene isolare quei termini che non contribuiscono all'indeterminazione del limite:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x+\cos x-1-x+\frac{x^2}{2}}{x^2\sin x\cos x} &= \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x+\cos x-1-x+\frac{x^2}{2}}{x^2\sin x}\\ &= \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x+\cos x-1-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}\,\frac{x}{\sin x}.\end{aligned}$$

La prima e l'ultima frazione tendono a 1 per $x\to 0$. Concentriamoci dunque sulla frazione centrale. Applichiamo una prima volta il teorema di De l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1-x+\frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x-1+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}-\frac{\sin x-x}{3x^2}\\ &= -\frac{1}{6}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{3x^2}.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Applicando ancora una volta il teorema di De l'Hospital, si verifica che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{3x^2}=0.$$

Dunque il limite dell'esercizio vale $-1/6$.

Esercizio 4. Questo esercizio ha una soluzione molto veloce, a patto di ricordare il teorema fondamentale del calcolo integrale. La teoria ci insegna che la derivata di F vale semplicemente

$$F'(x)=\cos(\log x),$$

e la derivata seconda si ottiene allora derivando quest'ultima espressione:

$$F''(x)=-\frac{1}{x}\sin(\log x).$$

Basta ora scegliere $x=1$ per ottenere

$$F'(1)=\cos 0=1,\qquad F''(1)=-\sin 0=0.$$

Una soluzione alternativa consiste nel risolvere preliminarmente l'integrale indefinito. Cambiando variabile, $\log t=u$, cioè $t=e^u$, e $dt=e^u\,du$, l'integrale si trasforma in

$$\int e^u\cos u\,du.$$

Questo integrale si risolve integrando due volte per parti, e alla fine

$$\int\cos(\log t)\,dt=\frac{t\,(\cos(\log t)+\sin(\log t))}{2}+C.$$

Questo approccio, ovviamente, risulta più lungo del primo metodo di risoluzione.