Soluzioni degli esercizi del 13 giugno 2012

Esercizio 1. Cercare una funzione derivabile y tale che $y'(x) = 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$ significa trovare una funzione la cui derivata è identicamente nulla in tale intervallo. Dal teorema di Lagrange sappiamo che solo le funzioni costanti possono avere questa proprietà. Di conseguenza, $y(x) = a$ per un'opportuna costante $a \in \mathbb{R}$. Passiamo al secondo punto, seguendo il suggerimento contenuto nel testo. La derivata seconda è la derivata della derivata prima; l'equazione $y''(x) = 0$ equivale a richiedere che y' abbia derivata identicamente uguale a zero. Usando il punto precedente, deduciamo che $y'(x) = a$ per un'opportuna costante $a \in \mathbb{R}$. Ma allora

$$y(x) = \int a \, dx = ax + b,$$

dove anche b è una qualunque costante reale. Abbiamo così dimostrato che le uniche funzioni derivabili due volte la cui derivata seconda è sempre zero in un intervallo sono le rette.

Per rispondere all'ultimo quesito, ci basta scegliere a e b in modo che $y(x) = ax + b$ soddisfi le due condizioni $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$. Sostituendo troviamo

$$-a + b = -1, \qquad a + b = 1,$$

cioè $b = 0$ e $a = 1$. Questo non dovrebbe sorprenderci, poiché l'unica retta che passa per i due punti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ è la retta $y = x$.

Esercizio 2. La funzione è definita per $x(x - 2) \geq 0$, cioè

$$f : (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

In tale dominio f è continua, in quanto composizione di funzioni continue. Si ha poi:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \qquad f(2) = 2 \\ &\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Per la ricerca degli eventuali asintoti obliqui — giacché non possono esistere asintoni verticali né orizzontali — si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \arctan \sqrt{x(x-2)} \right) = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \arctan \sqrt{x(x-2)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dunque la retta $y = x + \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. Da notare che $x + \arctan \sqrt{x(x-2)} < x + \frac{\pi}{2}$ per ogni x, sicché il grafico di f resta sempre sotto l'asintoto.

Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + x(x-2)} \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x(x-2)}} + 1 \\ &= \frac{x(x-1)(x-2) + \sqrt{x(x-2)}}{x(x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Per $x > 2$ tale derivata è strettamente positiva, in quanto somma di termini positivi. Per $x < 0$, la derivata prima si annulla in corrispondenza della soluzione dell'equazione

$$x(x-1)^2(x-2) = 1,$$

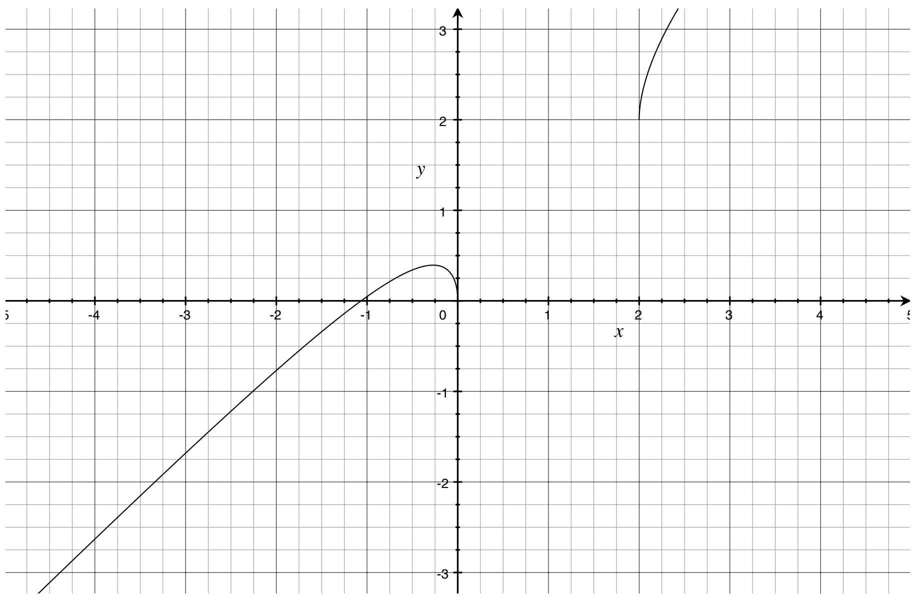

FIGURA 1. Grafico della funzione f

e accettiamo il fatto che questa equazione possiede un'unica soluzione negativa $x_0 \simeq -0.272$. Osservando che

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = +\infty,$$

deduciamo che x_0 è un punto di massimo relativo.

Infine, la derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}} < 0$$

per ogni x appartenente al dominio di f esclusi $x=0$ e $x=2$. La funzione è dunque concava. Un grafico qualitativo è riportato in figura.

Esercizio 3. Seguiamo il suggerimento, e calcoliamo $\int \log x\, dx$. Il trucco è abbastanza classico:

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx &= \int 1\cdot \log x\, dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= x\log x - x + C.\end{aligned}$$

Per risolvere l'esercizio, procediamo ancora per parti:

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 \, dx &= \int \log x \cdot \log x\, dx \\ &= \log x(x\log x - x) - \int \frac{1}{x} x\,(\log x - 1)\, dx \\ &= \log x(x\log x - x) - \int \log x\, dx + \int dx \\ &= \log x(x\log x - x) - (x\log x - x) + x \\ &= x\,(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.\end{aligned}$$

Possiamo scegliere la primitiva

$$F(x) = x\,(\log x)^2 - 2x\log x + 2x$$

e applicare il teorema di Torricelli:

$$\int_1^{2e} (\log x)^2\,,\; dx = F(2e) - F(1) = 2e\,(\log 2 + 1)^2 - 4e\,(\log 2+1) + 4e - 2.$$

Esercizio 4. Riscriviamo il termine generale della nostra successione raccogliendo a fattore comune l'infinito dominante:

$$\sqrt[n]{n^2 + \sin^n + n} = \sqrt[n]{n^2 \left(1 + \frac{\sin^2 n}{n^2} + \frac{1}{n}\right)} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \sqrt[n]{1 + \frac{\sin^2 n}{n^2} + \frac{1}{n}}.$$

La seconda radice converge a 1 per $n \to +\infty$. La prima radice è apparentemente una forma indeterminata. Tuttavia basta usare le proprietà dei logaritmi per scrivere

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\log \sqrt[n]{n}\right) = \exp\left(\frac{\log n}{n}\right) \to \exp 0 = 1$$

grazie al confronto degli infiniti. Ricapitolando, la successione converge al limite 1.