

5 settembre 2012

Appello ordinario

2 ore

Nome e Cognome:

Matricola:

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - 3x - x|x|}.$$

Si chiede di

- (1) determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
- (2) determinare gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità e gli eventuali estremi;
- (3) determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$;
- (4) determinare l'immagine della funzione;
- (5) tracciare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 16 - x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

- (1) calcolare la media integrale μ di f sull'intervallo $[-1, 3]$.¹
- (2) Dire se esiste un numero $c \in [-1, 3]$ tale che $f(c) = \mu$.

Esercizio 3. (a) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Suggerimento: può essere utile porre $t = 1/x$.

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))},$$

essendo a e b due numeri reali fissati.**Esercizio 4.** È assegnata l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = -\frac{y}{x} + 4x^2.$$

- (a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (1).
- (b) Trovare la soluzione particolare che verifica la condizione $y(-1) = 0$.

¹La media integrale di una generica funzione f sull'intervallo $[a, b]$ è il numero $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.