Soluzioni degli esercizi del 5 settembre 2012

Esercizio 1. L'espressione della funzione contiene un valore assoluto, e conviene esplicitarlo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-3x-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{1-3x+x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per determinare il dominio, escludiamo gli zeri del denominatore. Dobbiamo risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} 1-3x-x^2=0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-3x+x^2=0 \\ x<0 \end{cases}$$

Il primo sistema possiede la soluzione

$$x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2},$$

mentre il secondo non ha soluzioni. Quindi il dominio di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\}$.

È immediato verificare che le rette $y=-1$ e $y=1$ sono asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

La retta $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ è un asintoto verticale, e precisamente

$$\lim_{x \to \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)^+} f(x) = -\infty.$$

Deriviamo la funzione nel sottodominio $(0, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{(2-3x)x}{(-1+3x+x^2)^2}.$$

Da questa formula deduciamo che f cresce fra 0 e $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, cresce ancora fra $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ e $2/3$, e decresce dopo $2/3$. Il punto di ascissa $2/3$ è pertanto un punto di massimo relativo. Invece, se deriviamo la funzione nel sottodominio $(-\infty, 0)$, troviamo

$$f'(x) = \frac{(2-3x)x}{(1-3x+x^2)^2}.$$

Questa funzione è sempre negativa, e dunque f è sempre decrescente fra $-\infty$ e 0. Resta da capire se f sia derivabile per $x=0$. La risposta è affermativa, osservando che

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(2-3x)x}{(-1+3x+x^2)^2} = \lim_{x \to 0-} \frac{(2-3x)x}{(1-3x+x^2)^2} = 0.$$

Concludiamo che f è derivabile in tutti i punti del suo dominio di definizione.

L'equazione $f(x) = -1$ non può avere soluzioni $x<0$, dato che $f(x) \geq 0$ per $x \leq 0$. Pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{x^2}{1-3x-x^2} = -1,$$

che si abbassa di grado e porge $x = 1/3$. A questo punto, abbiamo già un quadro piuttosto chiaro dell'andamento della funzione, e ne riportiamo un grafico qualitativo in figura. Lo studio della convessità conduce ad equazioni di terzo grado; tuttavia si capisce, raccogliendo le informazioni in nostro possesso, che la funzione ha un flesso negativo ed uno maggiore dell'ascissa dell'asintoto verticale.

In particolare, l'immagine della funzione è l'insieme

$$\left(-\infty, -\frac{4}{13}\right] \cup [0, +\infty).$$

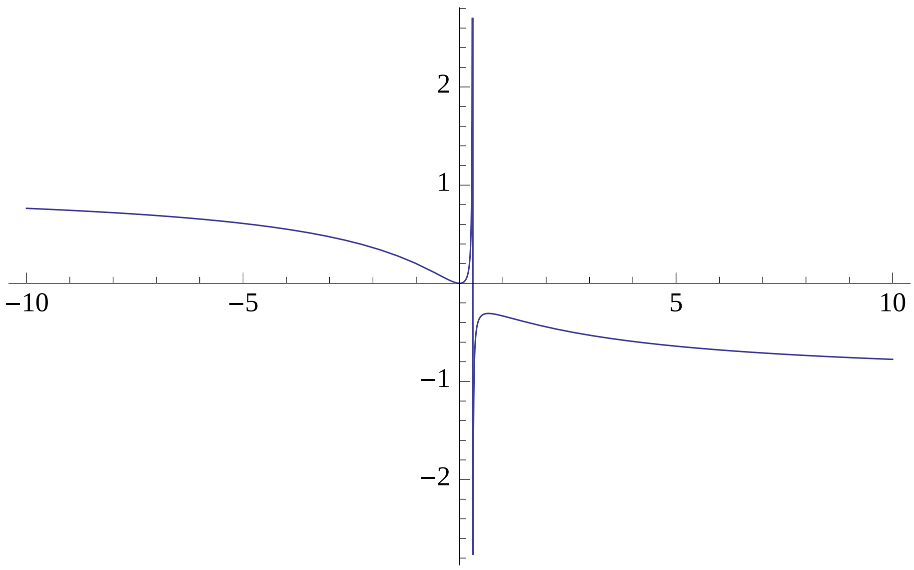

Figura 1. Grafico della funzione f.

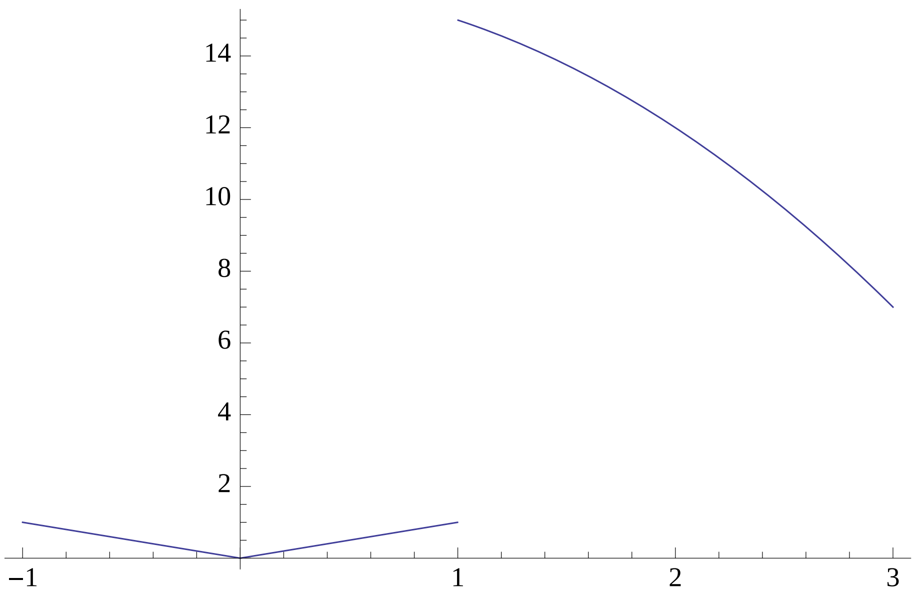

Figura 2. Grafico della funzione f.

Esercizio 2. Può essere utile disegnare il grafico della funzione f. Quindi

$$\mu = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3}(16-x^2)\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{70}{3}\right] = \frac{73}{12}.$$

Usando una calcolatrice,

$$\frac{73}{12} \approx 6.0833333.$$

Guardando il grafico, capiamo che l'equazione $f(x)=\mu$ non ha soluzione: infatti l'intervallo $[1,7)$ non appartiene all'immagine della funzione.

Esercizio 3. Il primo limite può essere risolto in modi apparentemente diversi, ma fondamentalmente equivalenti. Qualcuno potrebbe ricordare che

$$\log(1+t) \simeq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

per $t \to 0$. Quindi

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \simeq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$$

per $x \to +\infty$. Ma allora

$$x - x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \simeq x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}\right) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x},$$

e quindi il limite proposto vale $1/2$.

Volendo seguire una strada più standard, poniamo $t = 1/x$ in modo che $t \to 0$, e vediamo che

$$x - x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{t - \log(1+t)}{t^2}.$$

Possiamo ora applicare il teorema di De l'Hospital all'ultima espressione, ottenendo il risultato $1/2$.

Il secondo limite richiede meno calcoli, e basta ricordare che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1.$$

Infatti

$$\frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))} = \frac{\log(1+(\cos(ax)-1))}{\log(1+(\cos(bx)-1))} = \frac{\frac{\log(1+(\cos(ax)-1))}{\cos(ax)-1}}{\frac{\log(1+(\cos(bx)-1))}{\cos(bx)-1}} \frac{\cos(ax)-1}{\cos(bx)-1}.$$

Ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{\cos(bx)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(ax)-1}{2a^2x^2}}{\frac{\cos(bx)-1}{2b^2x^2}} \frac{2a^2x^2}{2b^2x^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Riassumendo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Esercizio 4. Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, lineare e non omogenea, basta applicare la nota formula di risoluzione, che porge

$$y = x^3 + \frac{C}{x},$$

dove C è una costante reale arbitraria. Imponendo che $y(-1) = 0$, troviamo l'equazione

$$-1 - C = 0,$$

che risolviamo immediatamente: $C = -1$.