

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — versione A

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Qual è il polinomio di Taylor di quinto grado, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $x \mapsto 1 - \sin x$?

X(a) $1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$

(b) $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$

(c) $1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Quesito 2. La funzione $x \mapsto xe^{-x}$

(a) è ovunque convessa

X(b) ha un punto di flesso

(c) ha la derivata seconda che si annulla in un certo punto, che però non è un flesso.

Quesito 3. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - \sin x}{x^2}$ vale

(a) $+\infty$

X(b) $-1/2$

(c) non esiste.

Quesito 4. Calcolare l'integrale

$$\int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(3x)} = +\infty$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2x + 6 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$y = x + 2 - 2e^{-x} \sin(x)$$

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — versione B

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + \sin x}{1 - \cos^2 x}$

- (a) vale 1
(b) vale $+\infty$
X(c) vale $1/2$.

Quesito 2. La funzione $x \mapsto x \cos x$

- (a) è convessa in un opportuno intorno di $x = \pi/2$
X(b) è concava in un opportuno intorno di $x = \pi/2$
(c) non possiede punti di flesso.

Quesito 3. Il polinomio di Taylor di secondo grado, centrato nel punto $x_0 = 1$, della funzione $x \mapsto 1 + \log x$

- X(a) si annulla almeno una volta fra 0 e 1
(b) è sempre strettamente positivo
(c) diverge a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

Quesito 4. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{1 - \tan^2 x} dx = \frac{1}{2} (\log |\sin x + \cos x| - \log |\cos x - \sin x|) + C$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_2^5 \frac{x-1}{x^2+x-6} dx = +\infty$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{-2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}(e^{-2x} + 1)$$

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — versione C

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Il polinomio di Taylor di sesto grado, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $x \mapsto \cos x - 1 + x + x^2$ è

X(a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$.

(b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$

(c) $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}$

Quesito 2. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x - x^3}{\cos x - 1}$

(a) vale $-\infty$

X(b) vale 0

(c) vale $-7/3$.

Quesito 3. La funzione $x \mapsto x \tan(x^2)$

(a) ha un punto di minimo relativo in $x = 0$

X(b) ha un punto di flesso in $x = 0$

(c) ha uno zero della derivata seconda in $x = 0$, che però non è un punto di flesso.

Quesito 4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_3^4 \frac{3x - 1}{(x - 3)(x + 5)} dx = +\infty$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x + \sin(x)}{3y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} - \cos(x) + 2}$$

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — versione D

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x + \log(x+1)}{\sin x - x}$ vale

- (a) 0
(b) $+\infty$
X(c) $-\infty$

Quesito 2. Consideriamo la funzione $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, definita per ogni $x \notin \{-1, +1\}$.

- (a) Il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di secondo grado è $1 - x^2$
X(b) Il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di secondo grado coincide con il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di terzo grado.
(c) Il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di secondo grado coincide con il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di quarto grado.

Quesito 3. La funzione $x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$

- (a) è concava in un piccolo intorno dell'origine
(b) ha un punto di flesso nell'origine
X(c) è convessa in un piccolo intorno dell'origine.

Quesito 4. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1} dx = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x(2x+1)}} = \frac{\pi}{4}$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + x^3 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

$$y = x^4/3 + (2/3)x$$

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — Versione E

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\cos x}$

- (a) non esiste
- X(b) vale 1
- (c) vale 0.

Quesito 2. Il polinomio di Taylor, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $x \mapsto \arcsin x$

- (a) contiene solo potenze di x con esponente pari
- (b) contiene tanto potenze di x con esponente pari, quanto potenze con esponente dispari
- X(c) contiene solo potenze di x con esponente dispari.

Quesito 3. Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte, tale che $D^2 f(x) > 0$ per ogni x reale.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- (b) Può capitare che i due limiti di f a $-\infty$ e a $+\infty$ siano entrambi finiti
- X(c) almeno uno dei limiti di f a $-\infty$ e a $+\infty$ deve essere infinito.

Quesito 4. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2 \sin x}{2} dx = -\frac{1}{2}x^2 \cos x + x \sin x + \cos x$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y - \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y = (1/4)e^x - (1/4)e^{-x} + (1/2) \sin x$$

Nome:
Cognome:
Matricola:

Seconda prova parziale di Matematica — 27 gennaio 2010 — versione F

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Sia $f(x) = e^{\sin x - x}$.

(a) f è convessa in un intorno del punto $x_0 = 1$

X(b) f possiede un punto di flesso in $x_0 = 0$

(c) f decresce in $(-\infty, 0)$ e cresce in $(0, +\infty)$.

Quesito 2. Sia P_3 il polinomio di Taylor di terzo grado, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $x \mapsto \sin x - 1 + \cos x$.

(a) $P_3(x) \geq 0$ per ogni x

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_3(x) = +\infty$

X(c) L'equazione $P_3(x) = 0$ possiede esattamente tre soluzioni reali distinte.

Quesito 3. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$

(a) vale 0

(b) vale $+\infty$

X(c) vale $-\infty$.

Quesito 4. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{\sin x + 2}{\sin x - 2} \right|$$

Quesito 5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \log(1 + \sqrt{2})$$

Quesito 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x \log x} + 2x \log x \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$y = (x^2 - 4) \log x$$