Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione A

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Scrivere che "per ogni $M > 0$, definitivamente risulta $|p_n| > M$" significa:
(a) che $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$
X(b) che $\lim_{n\to+\infty} |p_n| = +\infty$
(c) nulla: la frase non ha alcun legame con i limiti.

Quesito 2. Quale delle seguenti affermazioni equivalgono a "la funzione $f\colon(-1,1) \to \mathbf{R}$ ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$"?
(a) I due limiti $\lim_{x\to 0-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0+} f(x)$ sono infiniti
X(b) Almeno uno fra i due limiti $\lim_{x\to 0-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0+} f(x)$ è infinito
(c) Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in B(0,\delta)$ implica $|f(x)| > M$.

Quesito 3. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$ vale
X(a) 1
(b) 0
(c) $+\infty$

Quesito 4. Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^n) - 2n^3}{4n^n + 3n^2}$
X(a) vale 0
(b) non esiste perché $\lim_{n\to+\infty} \sin(n^n)$ non esiste
(c) vale $-2/3$.

Quesito 5. La funzione $f(x) = \cos(|x|)$ definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
X(a) è derivabile in ogni punto
(b) non è derivabile in $c = 0$, poiché il valore assoluto non è derivabile in tale punto
(c) è monotona in un piccolo intorno di $c = 0$.

Quesito 6. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla derivabilità delle funzione f nel punto x_0?
(a) I due limiti $\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esistono e sono uguali.
X(b) Esiste un numero L reale tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L \right| < \varepsilon$
(b) I due limiti $\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esistono e sono finiti

Quesito 7. Supponiamo che $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia una funzione, e che $\{x_n\}_n$ sia una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.
(a) il grafico di f presenta almeno un asintoto verticale
(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
X(c) $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = +\infty$

Quesito 8. Data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(a) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(\lambda x) = -\infty$
X(b) Per ogni $\lambda < 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(\lambda x) = -\infty$
(c) Esiste $\lambda > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(\lambda x)$ non esiste.

Quesito 9. Supponiamo che f sia una funzione derivabile ovunque, tale che $Df(x) = \frac{x}{|x|}$ per ogni $x \neq 0$.
(a) $f(x) = |x|$ per ogni x.
X(b) Non può esistere una funzione con queste proprietà.
(c) Esiste almeno un punto critico per f.

Quesito 10. Supponiamo che $f(0) = -3$ e che $Df(x) \leq 5$ per ogni valore di x. Quanto può valere, al massimo, $f(2)$?
(a) Qualunque valore reale
(b) Qualunque valore reale e positivo
X(c) 7.

Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione B

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Scrivere che "per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente risulta $|p_n - 1| < \varepsilon$" significa:
X(a) che $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$
(b) che $\lim_{n\to+\infty} |p_n| = 1$
(c) nulla: la frase non ha alcun legame con i limiti.

Quesito 2. Quale delle seguenti affermazioni equivalgono a "la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = q$"?
(a) I due limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ sono infiniti
X(b) Almeno uno fra i due limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è uguale a q
(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Quesito 3. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$ vale
(a) 0
X(b) 1
(c) $+\infty$

Quesito 4. Supponiamo che la funzione $f\colon (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbf{R}$ sia derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione. Se $Df(x) > 0$ per ogni $x \in (-1,0)\cup(0,1)$, allora
X(a) non si può dire nulla sulla monotonia di f
(b) f è monotona crescente nel suo dominio di definizione
(c) f può essere prolungata per continuità all'intervallo $(-1,1)$.

Quesito 5. La funzione $f(x) = \left(\sin(\frac{|x|}{2})\right)^2$ definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
X(a) è derivabile in ogni punto
(b) non è derivabile in $c = 0$, poiché il valore assoluto non è derivabile in tale punto
(c) è monotona in un piccolo intorno di $c = 0$.

Quesito 6. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla derivabilità delle funzione f nel punto c?
(a) f è continua in c e i due limiti $\lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, $\lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ sono finiti
X(b) Per ogni successione $\{h_n\}_n$ tale che $h_n \to 0$ e $h_n \neq 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$ esiste finito.
(c) Per almeno una successione $\{h_n\}_n$ tale che $h_n \to 0$ e $h_n \neq 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$ esiste.

Quesito 7. Supponiamo che $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia una funzione, e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
(a) Per ogni $M < 0$, esiste $K > 0$ tale che $|x| > K$ implica $f(x) < M$
X(b) Esiste una successione $\{x_n\}_n$ tale che $f(x_n) < -100$ per ogni n
(c) $\sup f$ è infinito.

Quesito 8. Data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(a) $\lim_{x\to\pi/2} f(\cos x)$ esiste
X(b) $\lim_{x\to 0} f(|\sin x|) = 0$
(c) f è limitata in un intorno di 0.

Quesito 9. Supponiamo che $f: E \to \mathbf{R}$ possieda un massimo locale in un certo punto $x_0 \in E$. Se f è derivabile in x_0,
(a) $f'(x_0) = 0$ grazie al teorema di Fermat
(b) $f'(x_0) \leq 0$
X(c) la derivata di f in x_0 potrebbe non essere nulla, dipende dalla posizione di x_0 in E.

Quesito 10. Supponiamo che $f(0) = 0$ e che $Df(x) \geq 1$ per ogni valore di x. Quanto può valere, al massimo, $f(2)$?
(a) Qualunque valore reale
X(b) Qualunque valore maggiore o uguale a 2
(c) Qualunque valore reale e positivo.

Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione C

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Quale delle seguenti affermazioni equivalgono a "la funzione $f\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ non ha asintoto verticale per $x=0$"?
X(a) I due limiti $\lim_{x\to0-} f(x)$ e $\lim_{x\to0+} f(x)$ sono finiti
(b) Almeno uno fra i due limiti $\lim_{x\to0-} f(x)$ e $\lim_{x\to0+} f(x)$ è finito
(c) La funzione è continua in $x=0$

Quesito 2. Scrivere che "per ogni $M\in\mathbf{R}$, definitivamente risulta $p_n<M$" significa:
(a) che $\lim_{n\to+\infty} p_n=0$
X(b) che $\lim_{n\to+\infty} p_n=-\infty$
(c) nulla: la frase non ha alcun legame con i limiti.

Quesito 3. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt[3]{x}}$ vale
X(a) 0
(b) 1
(c) $+\infty$

Quesito 4. Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^n-3n^2}{\sin(n^n)+2n^3}$
X(a) vale $+\infty$
(b) non esiste perché $\lim_{n\to+\infty}\sin(n^n)$ non esiste
(c) vale $3/2$.

Quesito 5. La funzione $f(x)=(x-|x|)^2$ definita per ogni $x\in\mathbf{R}$
(a) non è derivabile in $c=0$, poiché il valore assoluto non è derivabile in tale punto
X(b) è derivabile in ogni punto
(c) è monotona in un piccolo intorno di $c=0$.

Quesito 6. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla continuità delle funzione f nel punto x_0?
(a) Esiste un numero L reale tale che, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$ implica $|f(x)-L|<\varepsilon$
(b) I due limiti $\lim_{h\to0-} f(x_0+h)$ e $\lim_{h\to0+} f(x_0+h)$ esistono e sono finiti
X(c) I due limiti $\lim_{h\to0-} f(x_0+h)$ e $\lim_{h\to0+} f(x_0+h)$ esistono e sono uguali a $f(x_0)$.

Quesito 7. Supponiamo che $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sia una funzione, e che $\{x_n\}_n$ sia una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=-\infty$.
(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
(b) il grafico di f presenta almeno un asintoto verticale
X(c) $\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x)=-\infty$

Quesito 8. Data una funzione $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(a) Per ogni $\lambda\in\mathbf{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(\lambda x)=+\infty$
X(b) Per ogni $\lambda<0$, $\lim_{x\to-\infty} f(\lambda x)=+\infty$
(c) Esiste $\lambda>0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(\lambda x)$ non esiste.

Quesito 9. Supponiamo che f sia una funzione derivabile ovunque, tale che $Df(x)=\frac{1}{x}$ per ogni $x\neq0$.

(a) $f(x) = \log|x|$ per ogni x.
X(b) Non può esistere una funzione con queste proprietà.
(c) f ha un asintoto orizzontale.

Quesito 10. Supponiamo che $f(0) = 1$ e che $Df(x) \leq 2$ per ogni valore di x. Quanto può valere, al massimo, $f(2)$?
(a) Qualunque valore reale
(b) Qualunque valore reale e positivo
X(c) 5.

Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione D

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sin x}$ vale
X(a) 0
(b) 1
(c) $+\infty$

Quesito 2. Quale delle seguenti affermazioni equivalgono a "la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non ha alcun asintoto orizzontale per $x \to +\infty$"?
(a) Il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è infinito
(b) Il limite $\lim_{x\to+\infty} |f(x)|$ è infinito
X(c) Non esiste alcun $L \in \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

Quesito 3. Scrivere che "per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente risulta $1-\varepsilon < |p_n| < 1+\varepsilon$" significa:
(a) che $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$
X(b) che $\lim_{n\to+\infty} |p_n| = 1$
(c) nulla: la frase non ha alcun legame con i limiti.

Quesito 4. Il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - n^n}{4n - \cos(n^n)}$
X(a) vale $-\infty$
(b) non esiste perché $\lim_{n\to+\infty} \cos(n^n)$ non esiste
(c) vale $1/4$.

Quesito 5. La funzione $f(x) = (|x|^3 - x)^2$ definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
X(a) è derivabile in ogni punto
(b) non è derivabile in $c = 0$, poiché il valore assoluto non è derivabile in tale punto
(c) è monotona in un piccolo intorno di $c = 0$.

Quesito 6. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente alla continuità delle funzione f nel punto x_0?
(a) $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0-h) = 0$
(b) I due limiti $\lim_{h\to 0-} f(x_0+h)$ e $\lim_{h\to 0+} f(x_0+h)$ esistono e sono finiti
X(c) I due limiti $\lim_{h\to 0-} f(x_0+h)$ e $\lim_{h\to 0+} f(x_0+h)$ esistono e sono uguali a $f(x_0)$.

Quesito 7. Supponiamo che $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia una funzione, e che $\{x_n\}_n$ sia una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
(a) il grafico di f presenta almeno un asintoto orizzontale.
(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$
X(c) Dato ε esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $|f(x) - L| < \epsilon$

Quesito 8. Data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(a) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to 0} f(\lambda x) = -2\lambda$
(b) Esiste $\lambda > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(\lambda x)$ non esiste
X(c) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to 0} f(\lambda x) = -2$

Quesito 9. Supponiamo che f sia una funzione derivabile ovunque, tale che $Df(x) = x^2 - 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

X(a) f è monotona crescente in $[1, +\infty)$
(b) f è monotona crescente
(c) $f(0) = f(1)$.

Quesito 10. Supponiamo che $f(0) = -1$ e che $Df(x) \leq 1$ per ogni valore di x. Quanto può valere, al massimo, $f(3)$?
(a) Qualunque valore reale
(b) Qualunque valore reale e positivo
X(c) 2.

Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione E

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. L'affermazione "$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$"
(a) è la definizione di continuità di f in c
X(b) è equivalente alla continuità di f in c, se c è punto di accumulazione per il dominio di f
(c) si applica alla funzione $f(x) = \sqrt{-x^4}$ per $c = 0$.

Quesito 2. Un funzione $f \colon E \to \mathbf{R}$ è monotona crescente se:
(a) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in E$
X(b) $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0$ per ogni x_1, $x_2 \in E$
(c) possiede un asintoto verticale all'interno del dominio di definizione E.

Quesito 3. La funzione $f(x) = \arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{1}{x}$, definita per ogni x che renda sensata la formula, è
(a) sempre positiva
(b) costante in tutto il domino di definizione
X(c) costante in ciascuna delle semirette $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

Quesito 4. Se $p_n = (-1)^n n^{-5}$, allora
(a) definitivamente p_n ha segno costante
(b) $\{p_n\}_n$ non ha limite
X(c) $p_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Quesito 5. Supponiamo che f sia una funzione derivabile, e definiamo $g(x) = f(|x|)$.
X(a) Se f è pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni x) allora g è derivabile in $c = 0$
(b) Se f è dispari (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni x) allora g è derivabile in $c = 0$
(c) g non può essere derivabile, in quanto composizione di una funzione derivabile f con il valore assoluto che non è derivabile in $c = 0$.

Quesito 6. La funzione $x \mapsto e^{\tan x}$ ha una delle seguenti proprità:
(a) per ogni $y \in \mathbf{R}$ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $e^{\tan x} = y$
X(b) è strettamente crescente in $[0, \pi/2)$
(c) $\lim_{x \to +\infty} e^{\tan x} = +\infty$

Quesito 7. Se $f \colon [a, b] \to \mathbf{R}$ è derivabile in $[a, b]$ e $\max f = f(a)$, allora
(a) $f'_+(a) \geq 0$
X(b) $f'_+(a) \leq 0$
(c) $f'_+(a) = 0$.

Quesito 8. La funzione $f(x) = 1 + \sqrt[3]{\arctan x}$
(a) è definita solo per $x \geq 0$
X(b) possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
(c) possiede almeno due zeri.

Quesito 9. Una funzione monotona decrescente
(a) non può avere punti di minimo assoluto
(b) non può avere più di un punto di minimo assoluto
X(c) può avere infiniti punti di minimo locale.

Quesito 10. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, che cosa possiamo affermare su $\lim_{t \to 0} f(1/t)$?

(a) Vale 0
(b) È infinito
(c) Potrebbe non esistere.

Nome:
Cognome:
Matricola:

Prima prova parziale di Matematica — 18 novembre 2009 — versione F

Barrare l'unica risposta corretta fra le tre alternative.

Quesito 1. Sia $f\colon E \to \mathbf{R}$. Sia c un punto isolato di E.
X(a) f è continua in c
(b) f è derivabile in c
(c) f ha un punto critico in c

Quesito 2. Un funzione $f\colon E \to \mathbf{R}$ è monotona decrescente se:
(a) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$
X(b) $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq 0$ per ogni x_1, $x_2 \in E$
(c) possiede un asintoto verticale all'interno del dominio di definizione E.

Quesito 3. La funzione $f(x) = \frac{1}{|x|}$, definita per ogni $x \neq 0$ è
(a) sempre crescente
(b) dispari
X(c) crescente su $(-\infty, 0)$

Quesito 4. Se $p_n = \sin(n)n^{-1}$, allora
(a) definitivamente p_n ha segno costante
(b) $p_n \to 1$ per $n \to +\infty$
X(c) $p_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Quesito 5. Supponiamo che f sia una funzione derivabile, e definiamo $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
(a) g è derivabile per ogni x tale che $\sqrt{f(x)}$ abbia significato
(b) g è crescente perché la radice quadrata è una funzione crescente
X(c) g è derivabile dove $f(x) > 0$

Quesito 6. ANNULLATO PER ERRORE DI BATTITURA La funzione $x \mapsto e^{\sin x}$ ha una delle seguenti proprità:
(a) per ogni $y \in \mathbf{R}$ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $e^{\sin x} = y$
(b) è strettamente crescente su $(0, \pi)$
(c) assume valori compresi tra -1 e 1

Quesito 7. Se $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ è derivabile in $[a, b]$ e $\max f = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, allora
X(a) $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$
(b) non possiamo dire niente su $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$
(c) la funzione su $[a, b]$ ha minimo agli estremi di $[a, b]$.

Quesito 8. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$
(a) è positiva
(b) possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
X(c) possiede almeno due zeri.

Quesito 9. Una funzione monotona f strettamente crescente
X(a) può avere punti di massimo assoluto
(b) ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
X(c) può avere infiniti punti di massimo locale.
per un errore nella copiatura del testo, sia la risposta (a) che la risposta (c) sono corrette.

Quesito 10. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, che cosa possiamo affermare su $\lim_{t \to 0^+} f(1/t)$?
X(a) Vale 0
(b) È infinito
(c) Potrebbe non esistere.