Soluzioni degli esercizi del 29 giugno 2010

Esercizio 1. La funzione è sempre definita: l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

poiché i logaritmi sono infiniti di ordine più basso di ogni potenza. La funzione non è né pari né dispari, e non possiede asintoti verticali o orizzontali. Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$

ci sono buone speranze che esistano gli asintoti obliqui. Però ci accorgiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}\log(x^2+4) - \frac{9}{4}\arctan\frac{x}{2} = +\infty,$$

e pertanto l'asintoto obliquo a $-\infty$ non esiste. Con un calcolo del tutto analogo, ci verifica che non esiste nemmeno l'asintoto obliquo a $+\infty$.

Passiamo al calcolo della derivata prima: dopo qualche semplificazione si arriva all'espressione

$$f'(x) = \frac{2x^2+x-1}{2(x^2+4)}$$

Il numeratore si annulla per $x = -1$ e $x = 1/2$. Siccome il denominatore è sempre positivo, la funzione cresce, ha un massimo in $x = -1$, decresce e ha un minimo in $x = 1/2$, e infine riprende a crescere. Con un po' di pazienza, si può calcolare anche la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{x^2-18x-4}{2(x^2+4)^2}.$$

Gli zeri del numeratore sono $9 \pm \sqrt{85}$, corrispondenti ad altrettanti flessi a tangente obliqua. Nella figura allegata è riportato il grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2. Innanzitutto, osserviamo che è fondamentale ricordare che stiamo calcolando un limite per $x \to 0$ *da sinistra*. Trattandosi di una forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$, è comodo studiare il limite del logaritmo dell'espressione data. Quindi calcoliamo

$$L = \lim_{x\to0-} \frac{\log(1+\tan x)}{1-\cos x}.$$

Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

possiamo concludere che

$$L = \lim_{x\to0-} \frac{\tan x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to0-} \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\frac{1}{2}x^2} = -\infty.$$

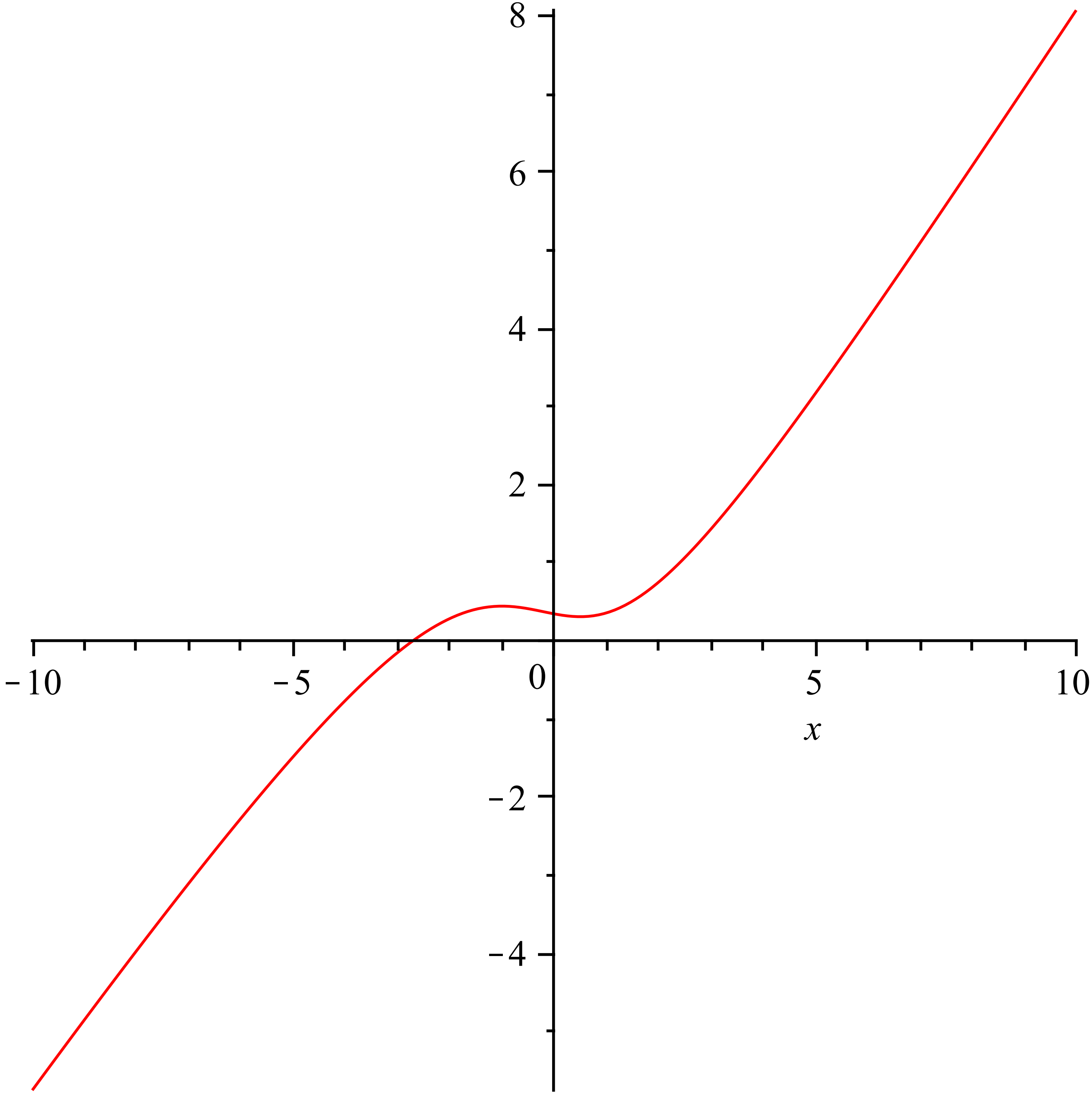
Abbiamo dimostrato che il logaritmo del limite di partenza diverge a meno infinito. L'unica possibilità è che il limite richiesto dall'esercizio è 0. Come utile esercizio, lo studente può dimostrare che

$$\lim_{x\to0+} (1+\tan x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = +\infty.$$

Esercizio 3. Integrando per parti,

$$\int_0^1 x^2 \log x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \log x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\, dx = -\frac{1}{9}.$$

Esercizio 4. L'insieme X è l'intersezione fra due insiemi. Il primo è l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2+4x+13 < 0$. Osservando che $x^2+4x+13 = (x+2)^2+4$, oppure utilizzando la nota formula per il calcolo delle radici di un'equazione di secondo grado, si verifica che la disequazione non ha soluzione. Quindi, indipendentemente dalla struttura del secondo insieme, $X = \emptyset$.


8
6
4
2
−10
−5
0
5
10
x
−2
−4