Soluzioni degli esercizi del 29 giugno 2010

Esercizio 1. L'argomento del logaritmo deve essere positivo: $(x^2+x)/(x^2+1) > 0$. Ma il denominatore è la somma di due quadrati, e non si annulla mai. Quindi ci basta risolvere $x^2+x>0$. La soluzione è $x<-1$ oppure $x>0$. Infine, il dominio di definizione di f è $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. I limit agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log 1 = 0, \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = \log 1 = 0.$$

Si controlla facilmente che l'unica intersezione del grafico di f con l'asse orizzontale cade in $x=1$, risolvendo $(x^2+x)/(x^2+1)=1$.

Dopo qualche semplificazione algebrica, la derivata di f vale

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

Il numeratore si annulla per $x = 1+\sqrt{2}$, mentre la radice $1-\sqrt{2}$ va ignorata perché non appartiene al dominio di definizione. A denominatore, $x^2+1>0$ sempre, mentre $x^2+x>0$ per $x<-1$ o per $x>0$. Con la regola dei segni, scopriamo che f decresce per $x<-1$, cresce per $0<x<1+\sqrt{2}$, e decresce per $x>1+\sqrt{2}$. In particolare, f assume un massimo locale per $x=1+\sqrt{2}$. Tale massimo è anche assoluto, poiché $f(1+\sqrt{2}) > 0 = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Omettiamo, per semplicità, lo studio della derivata seconda. Un grafico qualitativo è alla fine di questo file.

Esercizio 2. I primi tre "pezzi" con i quali è costruita la funzione f dell'esercizio sono funzioni elementari: rette o parabole. Sappiamo immediatamente disegnarne i rispettivi grafici. L'ultimo "pezzo", $(x-4)^3$ definito solo per $x\geq 4$, è solo apparentemente meno elementare. Nei fatti, basta disegnare il grafico di $x\mapsto x^3$ e traslarlo di quattro unità nel verso delle ascisse positive. Il risultato è il grafico che vediamo nella seconda figura in fondo a questo file. Ormai la soluzione dell'esercizio è facile: $\sup f = +\infty$ poiché $\lim_{x\to+\infty}(x-4)^3 = +\infty$. Invece $\inf f = \lim_{x\to 4-} -x^2-4x = -32$. Per completezza, osserviamo (ma non era richiesto) che questo estremo inferiore non è un minimo, poiché $f(4) = (4-4)^3 = 0$.

Esercizio 3. L'integrale non è fra i più semplici, come spesso accade quando si maneggiano le funzioni goniometriche. Seguendo il suggerimento, cerchiamo di fare buon uso delle formule di duplicazione:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

L'idea giusta è quella di ricondurre tutto ad una funzione dell'angolo doppio $2x$. Per far questo, osserviamo che

$$\frac{\sin 2x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\cos^2 x - 2\sin x\cos x} = \frac{\sin 2x + 2\cos 2x}{\frac{1+\cos 2x}{2} - \sin 2x} = 2\frac{\sin 2x + 2\cos 2x}{1+\cos 2x - 2\sin 2x}.$$

Ma ora notiamo che

$$\frac{d}{dx}(1+\cos 2x - 2\sin 2x) = -2\sin 2x - 4\cos 2x = -2(\sin 2x + 2\cos 2x).$$

Se poniamo $t = 1+\cos 2x - 2\sin 2x$, abbiamo $dt = -2(\sin 2x + 2\cos 2x)\,dx$ e perciò

$$\int \frac{\sin 2x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\cos^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx = 2\int \frac{\sin 2x + 2\cos 2x}{1+\cos 2x - 2\sin 2x}\,dx = 2(-\frac{1}{2})\int\frac{dt}{t} = -\log|t| + C.$$

Infine,

$$\int \frac{\sin 2x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\cos^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx = -\log|1+\cos 2x - 2\sin 2x| + C.$$

Esercizio 4. Il limite proposto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos\sqrt{x^3})\sin x^2}{3x(e^x-1)\log(1+2x^2)},$$

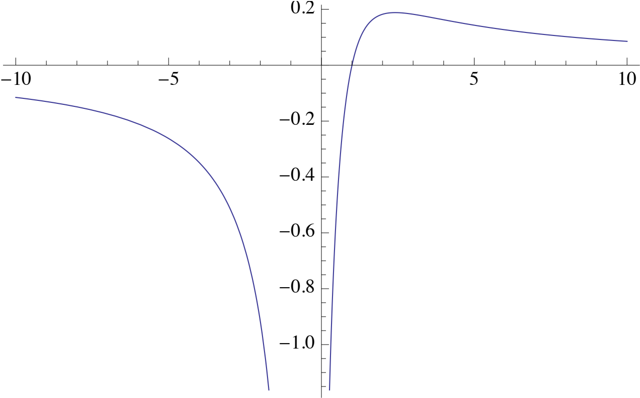
si risolve grazie ai seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1, \quad \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1, \quad \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1.$$

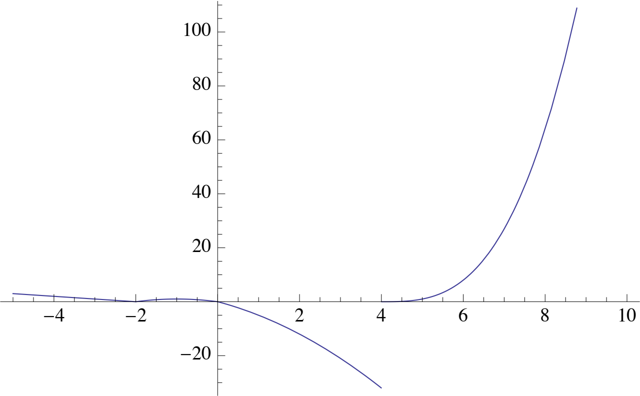
Infatti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos\sqrt{x^3})\sin x^2}{3x(e^x-1)\log(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos\sqrt{x^3}}{x^3}x^3\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}x^2}{3x\cdot\frac{e^x-1}{x}x\cdot\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2}2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3\cdot x^2}{3x\cdot x\cdot 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{12}x = 0.$$

Un'applicazione diretta della regola di De l'Hôpital, per quanto possibile e corretta, sarebbe senz'altro più macchinosa e insidiosa per i possibili errori nelle derivate delle varie funzioni composte.



0.2
−10
−5
5
10
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0


100
80
60
40
20
−20
−4
−2
2
4
6
8
10