Soluzioni degli esercizi del 29 giugno 2010

Esercizio 1. Evidentemente, l'unica restrizione al dominio di definizione della funzione è costituita dal logaritmo. Quindi il dominio è $(0, +\infty)$. Osserviamo che possiamo raccogliere qualche termine a fattor comune:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{x}{4}\right) + x \log x \left(\frac{x}{2} - 1\right).$$

Si vede che $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$, poiché $\lim_{x \to 0+} x \log x = 0$. Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Lo studio del segno della funzione non è elementare, e lo trascuriamo. La funzione risulta poi continua in tutto il dominio di definizione, e derivabile. Calcoliamo allora

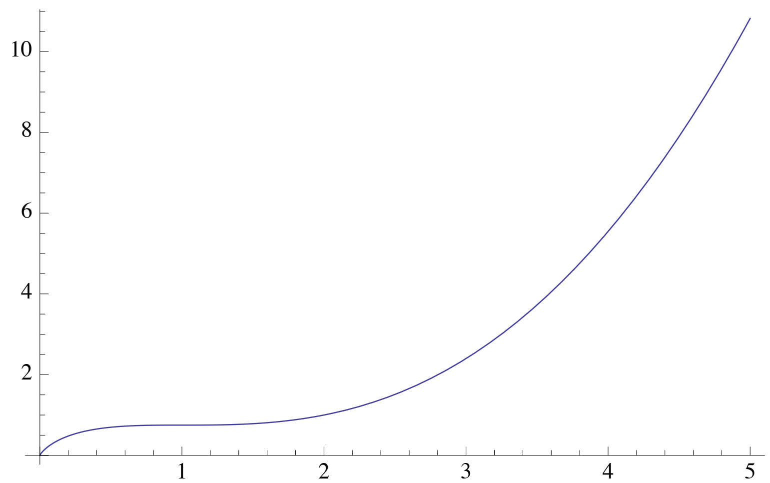
$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2} - \log -1 + x \log x + \frac{x}{2} = (x-1) \log x.$$

Lo studio del segno di f' è molto diretto: il fattore $x - 1$ è positivo per $x > 1$, mentre il fattore $\log x$ è positivo per $x > 1$. Quindi f è sempre crescente. Il punto $x = 1$ è un punto critico, la cui natura va indagata più approfonditamente.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \log x + \frac{x-1}{x},$$

e possiamo fare uso di questa espressione per osservare che $f''(1) = 0$. Sembra di capire che $x = 1$ sia un punto di flesso, ma per esserne sicuri dobbiamo verificare che f'' cambia segno "scavalcando" il valore $x = 1$. Scrivendo $f''(x) = \log x + 1 - \frac{1}{x}$, si vede che tale espressione è negativa per $x < 1$, e positiva per $x > 1$.



La funzione del primo esercizio

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme $U = \left\{ \frac{n}{n^2-1} \mid n \in \mathbf{N},\ n \geq 2 \right\}$ (ovviamente considerato come sottoinsieme di $\mathbf{R}$). Dobbiamo calcolare $\inf U$. Innanzitutto, $\frac{n}{n^2-1} > 0$ per ogni $n \geq 2$ naturale. Vogliamo dimostrare che $0 = \inf U$. Ricordando la definizione, dobbiamo dimostrare che, preso un numero $\epsilon > 0$ "piccolo a piacere", esiste un elemento di U che cade fra 0 e $0 + \epsilon$. Più esplicitamente, dobiamo costruire un numero $n = n_\epsilon \geq 2$ tale che

$$0 \leq \frac{n_\epsilon}{n_\epsilon^2 - 1} \leq \epsilon.$$

La prima disuguaglianza è scontata, come abbiamo osservato sopra. La seconda può essere risolta algebricamente (per esercizio, provate a risolvere $n \leq \epsilon(n^2 - 1)$ nell'incognita $n \geq 2$); più banalmente, è sufficiente osservare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$. Dalla definizione di limite, discende in particolare l'esistenza di $n_\epsilon \geq 2$ con le proprietà richieste.

Esercizio 3. Osserviamo che
$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}.$$
Quindi
$$\int_0^2 \frac{x-1}{x+2}\, dx = \int_0^2 1 - \frac{3}{x+2}\, dx = [x - 3\log|x+2|]_0^2 = 2 - 3\log 4 - (0 - 3\log 2) = 2 - 3\log 4 + 3\log 2.$$
Forse qualche studente più attento ricorderà che $\log 4 = \log(2^2) = 2\log 2$, e quindi possiamo semplificare il risultato:
$$\int_0^2 \frac{x-1}{x+2}\, dx = 2 - 6\log 2 + 3\log 2 = 2 - 3\log 2.$$

Esercizio 4. Γ è chiaramente il grafico di una parabola, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate e che taglia l'asse delle ascisse nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Se qualche studente per caso non ricordasse come disegnare questa parabola, potrebbe sempre costruire Γ con un rapidissimo studio di funzione. La generica retta r_m ha equazione $y = m(x-1)$, e quindi passa sempre per il punto $(1, 0)$. In altre parole, $\Gamma \cap r_m$ contiene sempre il punto $(1, 0)$; ora dobbiamo controllare quanti altri punti appartengano a questa intersezione. La risposta è molto facile, basta fare un disegno. Abbiamo una parabola e un "fascio" di rette che passano tutte per un punto della parabola stessa. Quindi tutte le rette taglieranno la parabola esattamente due volte. Per evitare contestazioni, è formalmente corretta anche la risposta meno... geometrica: due intersezioni per tutte le rette eccetto che per la retta tangente, che taglia la parabola una sola volta.

Ma a quale valore di m corrisponde, questa retta tangente? Qualche studente ex-liceale potrebbe ricordare l'approccio algebrico. Mettendo a sistema la prabola con la retta generica
$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = m(x-1) \end{cases}$$
e impoendo che ci siano due intersezioni coincidenti, otteniamo la condizione $(m-2)^2 = 0$, cioè $m = 2$. Questa soluzione è impeccabile, ma chiaramente richiede considerazioni non svolte nel nostro corso.

Più semplicemente, usiamo il calcolo differenziale per scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola $f(x) = x^2 - 1$ nel punto $(1, 0)$: Il coefficiente angolare deve essere $f'(1) = 2$, e la retta deve passare per $(1, 0)$. Dunque la sua equazione non può che essere $y = 2(x-1)$. Confrontando con la generica retta r_m, è evidente che bisogna scegliere $m = 2$