Soluzioni degli esercizi del 21 gennaio 2010

Esercizio 1. La funzione è definita solo se l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. Dobbiamo dunque risolvere $x^2 - 4 > 0$. Il dominio di definizione di f è l'insieme $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Può essere utile (ma non strettamente indispensabile) osservare che la funzione è pari: scambiando x con $-x$, il valore di $f(x)$ non cambia. Potremo d'ora in avanti limitarci a studiare la funzione per i valori positivi di x, e poi riflettere il grafico rispetto all'asse delle ordinate. Osserviamo che $\lim_{x \to 2+} f(x) = -\infty$ e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Vediamo se esistono asintoti obliqui (poiché di orizzontali non possono esserci):

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{\log(x^2 - 4)}{x} = +\infty.$$

Non esistono quindi asintoti obliqui, mentre $x = 2$ è un asintoto verticale.

La monotonia è veramente facile da studiare: infatti le funzioni $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 4$ e $x \mapsto \log x$ sono tutte crescenti in $(2, +\infty)$. Ricordando che la composizione di due funzioni crescenti è crescente, deduciamo subito che f è strettamente crescente in $(2, +\infty)$. Naturalmente, la stessa conclusione poteva essere ottenuta derivando:

$$Df(x) = 2x \left(1 + \frac{1}{x^2 - 4}\right). \tag{1}$$

Questa funzione non possiede né massimi né minimi assoluti. Essendo poi strettamente monotona, non possiede nemmeno estremanti locali. La formula per la derivata ci dice che non esistono punti critici, di alcuna natura.

Resta da chiarire la convessità. Poiché $x \mapsto x^2$ e $x \mapsto \log(x^2 - 4)$ sono rispettivamente convessa e concava in $(2, +\infty)$, siamo costretti a ricorrere al calcolo differenziale. Derivando (1), troviamo

$$D^2 f(x) = \frac{2\left(x^4 - 9x^2 + 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}.$$

Per trovare gli zeri di questa derivata seconda, dobbiamo risolvere $x^4 - 9x^2 + 12 = 0$. Ponendo $u = x^2$, l'equazione si riduce a $u^2 - 9u + 12 = 0$. Le radici sono

$$u_1 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2}, \quad u_2 = \frac{9 + \sqrt{33}}{2}.$$

Quindi avremo quattro zeri della derivata seconda:

$$x = \pm\sqrt{\frac{9 - \sqrt{33}}{2}}, x = \pm\sqrt{\frac{9 + \sqrt{33}}{2}}.$$

Tuttavia, non dobbiamo dimenticare che i numeri compresi fra -2 e 2 non ci interessano. In conclusione, esistono due punti di flesso (simmetrici rispetto all'origine, per parità): $x = \pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{2}}$.

Esercizio 2. Dal limite notevole[1]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

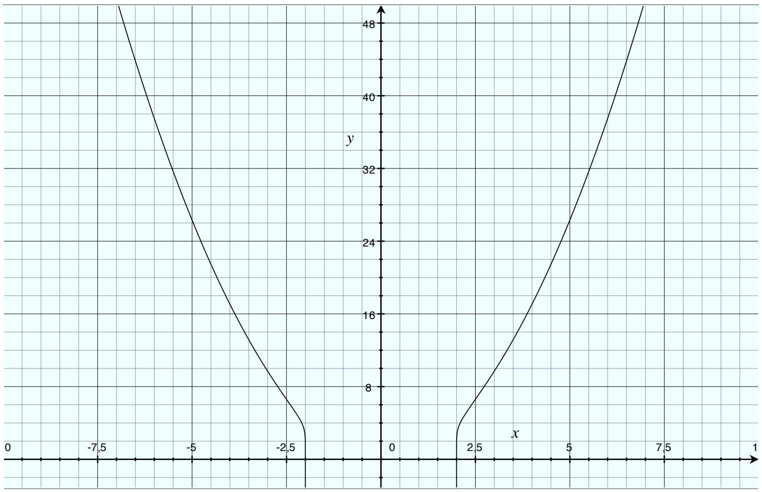
si ricava che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \tag{2}$$

Similmente, dal limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

[1] Oppure dall'applicazione del teorema di De l'Hospital.



La funzione del primo esercizio

deduciamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1. \tag{3}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to 0+} \frac{\arctan(\arcsin r)}{\arcsin(\arctan r)} &= \lim_{r \to 0+} \frac{\frac{\arctan(\arcsin r)}{\arcsin r} \arcsin r}{\frac{\arcsin(\arctan r)}{\arctan r} \arctan r} \\
&= \lim_{r \to 0+} \frac{\arcsin r}{\arctan r} \\
&= \lim_{r \to 0+} \frac{\frac{\arcsin r}{r}}{\frac{\arctan r}{r}} = 1.
\end{aligned}$$

Formalmente, abbiamo posto $x = \arcsin r$ e $x = \arctan r$ in (2) e (3).[1]

Per quanto riguarda il secondo limite, si tratta di una forma indeterminata del tipo $[\infty/0]$. Posto

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$$

e

$$g(x) = x^2,$$

possiamo applicare il teorema di De l'Hospital. Poiché

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - e^x \to 0 \quad \text{per } x \to 0$$

dobbiamo derivare ancora una volta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(1-x)^2} - e^x \right) = \frac{1}{2},$$

e quindi il limite proposto vale anch'esso 1/2.

[1] Forse qualche studente avrà notato che questo limite rispecchia una proprietà degli infinitesimi equivalenti: componendoli, si ottengono sempre infinitesimi equivalenti. Poiché $\sin x$, $\tan x$, $\arcsin x$ e $\arctan x$ sono tutti infinitesimi equivalenti a x per $x \to 0$, il limite non può che valere 1.

Una soluzione alternativa molto rapida consiste nell'applicare il polinomio di Taylor. È noto che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ Forse meno noto è che

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

e quindi

$$\frac{1}{1-x} - e^x = x^2 - \frac{x^2}{2!} + \dots = \frac{x^2}{2} + \dots$$

A questo punto è chiaro che il limite vale $1/2$.

Esercizio 3. Trattandosi di un integrale di funzione razionale fratta, cominciamo a scomporre il denominatore:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2.$$

Quindi, con il cambiamento di variabile $2x - 1 = u$, $2\,dx = du$, vediamo che

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(2x-1)} + C.$$

Per calcolare l'integrale improprio, dobbiamo calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{2(2x-1)} \right]_{x=1}^{x=c} = \lim_{c \to +\infty} -\frac{1}{2(2c-1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. L'equazione differenziale $u' - 2u = e^{2x} + e^{-x}$ è lineare, del primo ordine, non omogenea. Poiché per questo genere di equazioni differenziali esiste una formula generale risolutiva, applichiamola. Come noto, ci servono due integrali indefiniti. Il primo è semplicemente $\int 2\,dx = 2x$. Il secondo è

$$\int e^{-2x} \left(e^{2x} + e^{-x} \right) dx = \int 1\,dx + \int e^{-3x}\,dx = x - \frac{1}{3} e^{-3x}.$$

La formula risolutiva ci dice che la soluzione generale dell'equazione proposta è

$$u(x) = \left(C + x - \frac{1}{3} e^{-3x} \right) e^{2x},$$

al variare di tutte le possibili costanti reali C.