Soluzioni degli esercizi del 18 febbraio 2011

Esercizio 1. L'equazione differenziale $y' = (1+x)/xy$ è a variabili separabili:

$$y\,dy = \frac{1+x}{x}\,dx.$$

Integrando,

$$\frac{1}{2}y^2 = \log|x| + x + C.$$

Siccome vogliamo la soluzione definita per $x > 0$, possiamo togliere il valore assoluto dal logaritmo. Infine, per determinare C, imponiamo la condizione $y(1) = -4$:

$$\frac{1}{2}\cdot 16 = \log 1 + C,$$

e dunque $C = 8$. La soluzione cercata è $y(x) = -\sqrt{2(x+\log x+8)}$. Per inciso, notiamo che questa soluzione non è definita per qualunque valore di $x > 0$. Infatti, il radicando è palesemente negativo se $0 < x \ll 1$, a causa del logaritmo divergente a $-\infty$.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione definita dalla formula

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

(1) Il dominio naturale di f è descritto rimuovendo da $(-\infty, +\infty)$ gli zeri del denominatore. L'equazione $1 + \cos x = 0$ è risolta da $x \equiv \pi \mod 2\pi$, cioè dagli elementi dell'insieme $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Tuttavia, d'ra in avanti studieremo f nell'intervallo $[0, 2\pi]$, poiché la funzione è periodica di periodo 2π. Con questa convenzione, il dominio "naturale" di f è $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$. Essendo periodica, la funzione f non può avere asintoti orizzontali né obliqui. Invece, notando che†

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi-} \frac{\cos x}{-\sin x} = +\infty, \quad \lim_{x\to\pi+} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi+} \frac{\cos x}{-\sin x} = -\infty,$$

la retta $x = \pi$ è l'unico asintoto verticale (nell'intervallo di periodicità, ovviamente).

(2) Il segno della funzione è più semplice di quanto appaia. Infatti, $1 + \cos x \geq 0$ e basta studiare il segno di $\sin x$. In $[0, 2\pi]$, possiamo concludere che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \in [0, \pi)$.

(3) La derivata, che esiste in tutto il dominio di definizione, ha l'aspetto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

Deduciamo da questa formula che f è ovunque monotona crescente in senso stretto. In particolare, non possiede alcun punto critico (stazionario). La funzione non possiede né minimi né massimi assoluti.††

(4) Studiamo la derivata seconda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\cos x} = -\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Pertanto f è convessa in ogni intervallo in cui $\sin x \geq 0$, e concava nel complementare.

(5) Il grafico appare nell'ultima pagina.

---

† Abbiamo tacitamente utilizzato il teorema di De l'Hospital.

†† Se si restringe f a $[0, 2\pi]$, è corretto concludere che f possiede un minimo relativo in $x = 0$ e un massimo relativo in $x = 2\pi$.

Esercizio 3. Il limite si presenta in una forma di indeterminazione $[\infty - \infty]$. Spero sia chiaro che i limiti notevoli non possono bastare, e cerchiamo allora di semplificare quanto possibile l'espressione:

$$\frac{1}{\sin(3x)} - \frac{1}{3x} = \frac{3x - \sin(3x)}{3x\sin(3x)}$$

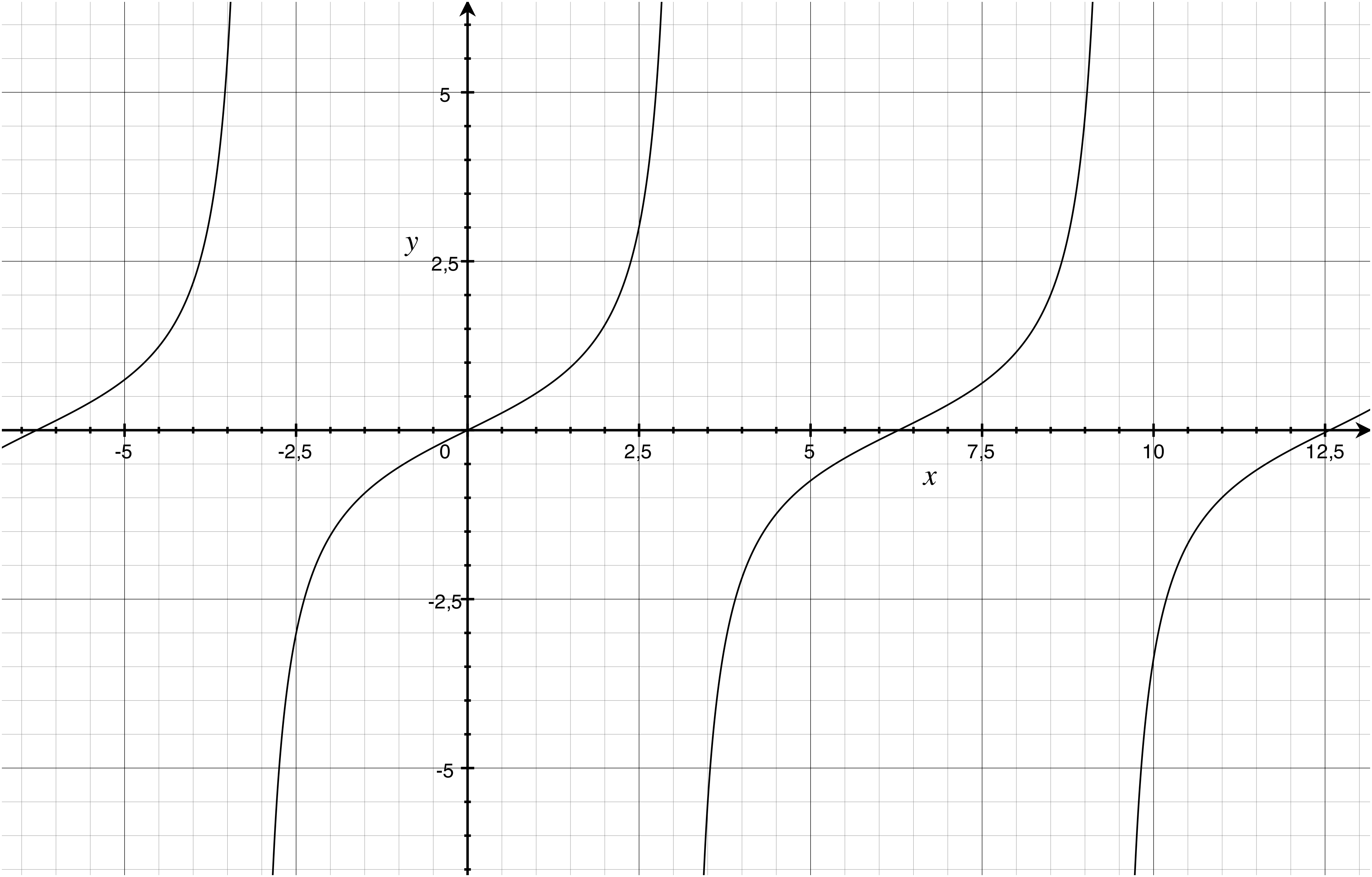
riporta il limite ad una forma indeterminata $[0/0]$, decisamente più *docile*. A questo punto possiamo usare il teorema di De l'Hospital††† un paio di volte. Lasciamo i calcoli delle due derivate allo studente. Ricordando i primi due termini dello sviluppo di Taylor del seno, possiamo scrivere

$$\frac{3x - \sin(3x)}{3x\sin(3x)} = \frac{3x - 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)}{3x(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3))} = \frac{\frac{3^3}{3!}x^3 + o(x^3)}{9x^2 + o(x^3)} \to 0 \quad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 4. La presenza della radice quadrata *invita* a cambiare variabile, ponendo $u = \sqrt{x}$. Quindi $x = u^2$, e $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. L'integrale diventa

$$\int 2u \sin u \,\mathrm{d}u = 2\left(-u\cos u + \int \cos u \,\mathrm{d}u\right) = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$$

††† Le ipotesi sono facilmente verificabili.



y
x
5
2,5
-2,5
-5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
10
12,5